COLLECTION QUEYSANNE-REVUZ

MATHEMATIQUE

Tome 2
ANALYSE

TERMINALES
CDE

FERNAND NATHAN

NOUVELLE COLLECTION DIRIGÉE

PAR

MICHEL QUEYSANNE
Ancien élève de l'E.N.S.
Maître assistant à l'Université
de Paris VII

ANDRÉ REVUZ
Ancien élève de l'E.N.S.
Professeur à l'Université
de PARIS VII

MATHEMATIQUE

par
MARC GOURION
Professeur agrégé au Lycée Henri IV

TERMINALE CDE

tome 2

ANALYSE

FERNAND NATHAN EDITEUR
18, rue Monsieur-le-Prince, PARIS VI

A la même Librairie

NOUVELLE COLLECTION QUEYSANNE-REVUZ

- MATHÉMATIQUE classe de 6e
- TRAVAUX DIRIGÉS classe de 6e
- MATHÉMATIQUE classe de 5e
- TRAVAUX DIRIGÉS classe de 5e
- MATHÉMATIQUE classe de 4e
- TRAVAUX DIRIGÉS classe de 4e
- MATHÉMATIQUE classe de 3e
- TRAVAUX DIRIGÉS classe de 3e
- MATHÉMATIQUE classe de 2e A
- MATHÉMATIQUE classes de 2e CT
  Tome 1
  Tome 2
- MATHÉMATIQUE classes de 1re AB
  Tome 1
  Tome 2
- MATHÉMATIQUE classes de 1re CDE
  Tome 1
  Tome 2
- MATHÉMATIQUE classe terminale A
- MATHÉMATIQUE classe terminale B
- MATHÉMATIQUE classe terminale CE
  Tome 1 nombres - probabilités
  Tome 2 analyse
  Tome 3 géométrie
- MATHÉMATIQUE classe terminale D
  Tome 1 nombres - probabilités
  géométrie
  Tome 2 analyse

AVANT-PROPOS

Ce volume intitulé *Analyse* développe les parties du programme relatives aux rubriques :

Calcul différentiel,
Calcul intégral,
Exemples de fonctions d'une variable réelle.

Ces parties étant strictement les mêmes dans les programmes des sections C, D et E, ce volume est commun à ces trois sections.

Les trois premiers chapitres constituent une mise au point, avec quelques compléments, des notions étudiées dans les classes précédentes *(continuité, limites, dérivées, variations des fonctions numériques d'une variable réelle)*.

Le chapitre 4, en grande partie nouveau, étudie de façon conjointe les *fonctions vectorielles* et la *cinématique*. Les espaces vectoriels et affines euclidiens y jouent un rôle essentiel.

Le chapitre 5, entièrement nouveau, est consacré au *calcul intégral*. L'outil privilégié est constitué par les fonctions en escalier encadrant une fonction donnée.

Le chapitre 6, également nouveau, étudie les *fonctions exponentielles et logarithmiques* et leurs applications.

Toutes les parties nouvelles sont introduites par des exemples simples; mais aussi bien dans les révisions de Première que dans les parties nouvelles on n'a pas oublié qu'il s'agissait de donner aux élèves des classes de terminales scientifiques une image qui ne soit pas trop déformée de l'*Analyse*. Aussi, pour une meilleure compréhension du cours et dans un souci légitime de rigueur, l'auteur n'a pas hésité à donner quelques compléments en petits caractères; ces compléments peuvent être sautés sans inconvénient en première lecture. Naturellement c'est aux Professeurs, suivant leur section et le niveau de leurs élèves, de voir dans quelle mesure ces développements peuvent être utilisés au mieux de l'intérêt de la classe.

Ce *souci de rigueur*, indispensable dans l'étude de l'Analyse n'exclut pas l'intérêt apporté aux *applications pratiques*. C'est ainsi, comme nous l'avons dit plus haut, que l'étude de la Cinématique a été menée de front avec l'étude des fonctions vectorielles. De même les fonctions en escalier ont été utilisées aussi bien pour la définition de l'intégrale que pour l'étude des applications (aire, volume, masse etc.). Enfin l'étude des fonctions logarithmiques conduit tout naturellement à l'utilisation des tables de logarithmes et de la règle à calcul et celle des fonctions exponentielles trouve son aboutissement normal dans la présentation de nombreux phénomènes physiques.

Dans le même ordre d'idée de nombreux exercices sont proposés aux élèves : certains sont plus théoriques, d'autres de caractère plus pratique; là aussi c'est au Professeur d'effectuer les choix nécessaires suivant ses élèves. De toute manière la pratique du calcul aussi bien littéral que numérique doit être développée dans toutes les sections.

En résumé ce livre a voulu mettre en vedette le double aspect théorique et concret présenté par l'*Analyse*. Nous espérons qu'ainsi conçu, il contribuera, d'une part, à la formation générale des élèves et, d'autre part, pourra constituer une solide base de départ aussi bien pour les futurs mathématiciens que pour les futurs utilisateurs de l'Analyse : informaticiens, mécaniciens, physiciens et ingénieurs.

M.Q. et A.R.

1 | Fonction numérique d'une variable réelle : continuité et limites.

Nous avons donné en classe de Première des exemples d'initiation conduisant aux notions délicates de continuité et de limites. Nous nous proposons de rappeler les résultats de la classe de Première et de les compléter. Nous avons donné les démonstrations des théorèmes relatifs aux opérations et à la composition de fonctions continues. Ces démonstrations ne figurent pas au programme officiel, mais nous pensons qu'elles permettent de mieux comprendre la notion de continuité.

I. Continuité

1. 1 CONTINUITÉ EN UN POINT

Rappelons qu'un intervalle de centre le nombre réel a est un intervalle ouvert de la forme

$$]a-h\,,\,a+h[\quad (h>0).$$

Définition.

Une fonction f définie sur un intervalle de centre x_0 est continue en x_0 si et seulement si, quel que soit l'intervalle J de centre $f(x_0)$, il existe un intervalle I de centre x_0 tel que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

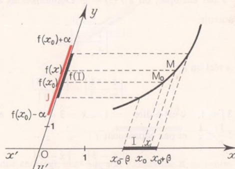


Fig. 1

Rappelons que lorsque nous écrivons : $f(x)$, $f(x_0)$, $f(\mathrm{I})$, ..., *nous supposons implicitement que f est définie* en x, en x_0, en tout point de I, ...

La propriété de continuité en un point est représentée à la figure 1 et elle peut s'écrire en utilisant les quantificateurs :

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists\, \beta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall\, x \in\,]x_0-\beta\,,\,x_0+\beta[)\quad |f(x)-f(x_0)| < \alpha.$$

Elle peut aussi s'énoncer : quel que soit $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout x réel on ait :

$$|x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha.$$

C'est souvent sous cette forme que l'on démontre la continuité de f en x_0. Rappelons que c'est $\alpha > 0$ *qui est donné arbitrairement*, alors qu'un nombre $\beta > 0$ *est cherché*, dont l'existence est affirmée. Il est clair que si β convient pour un α donné, tout nombre β' compris strictement entre 0 et β convient aussi pour cette valeur de α; mais si l'on change α, les valeurs de β que l'on peut choisir ne seront plus les mêmes en général.

La condition trouvée relative à x, soit $|x - x_0| < \beta$, est une *condition suffisante* (et non pas une condition nécessaire et suffisante) pour que l'on ait $|f(x) - f(x_0)| < \alpha$.

Exemples.

1. Soit la fonction f : $x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est continue pour $x_0 = 2$ par exemple; on a $f(2) = 4$. Donnons-nous arbitrairement un nombre réel $\alpha > 0$; nous cherchons à avoir

(1) $$|x^2 - 4| < \alpha.$$

Pour tout x réel on a $|x^2 - 4| = |x - 2|\,|x + 2|$.

Si $|x - 2| < 1$ on a $-1 < x - 2 < 1$ ou encore

$$3 < x + 2 < 5,$$

donc pour x vérifiant $|x - 2| < 1$ on a

$$|x^2 - 4| = |x + 2|\,|x - 2| < 5\,|x - 2|.$$

Donc pour avoir (1) il suffit d'avoir

$$|x - 2| < 1 \quad \text{et} \quad 5\,|x - 2| < \alpha;$$

il suffit donc de prendre $\beta = \inf\left(1, \dfrac{\alpha}{5}\right)$: la fonction étudiée est continue au point 2.

2. Soit la fonction f : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrons qu'elle est continue pour $x_0 = 3$ par exemple; on a $f(3) = \dfrac{1}{3}$. Donnons-nous arbitrairement $\alpha > 0$; nous cherchons à avoir

(2) $$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| < \alpha.$$

Pour tout x réel on a

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \frac{|x - 3|}{3\,|x|}$$

Si $|x - 3| < 1$, c'est-à-dire $-1 < x - 3 < 1$ ou encore $2 < x < 4$, nous aurons $0 < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$ et par conséquent :

$$\frac{|x - 3|}{3\,|x|} < \frac{|x - 3|}{6}.$$

Pour avoir (2) il suffit donc d'avoir

$$|x - 3| < 1 \quad \text{et} \quad \frac{|x - 3|}{6} < \alpha;$$

il suffit donc de prendre $\beta = \inf(1, 6\,\alpha)$: la fonction f est continue pour $x_0 = 3$.

EXERCICES

Soit la fonction f qui associe à tout nombre réel x le nombre suivant, quand il existe :

1. $f(x) = 1 + x + |x|$; construire la représentation graphique de f et montrer que f est continue au point $x = 0$.

2. $f(x) = |x| + |x + 2|$; construire la représentation graphique de f et montrer que f est continue aux points $x = -2$ et $x = 0$.

3. $f(x) = x^2 + x + 1$; montrer que f est continue au point $x = 1$ (remarquer que $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$).

4. $f(x) = x^2 + x + 2$; montrer que f est continue au point $x = 0$ (remarquer que $|x^2 + x| \leqslant x^2 + |x|$ et que si $|x| < 1$ on a $x^2 + |x| < 2\,|x|$).

5. $f(x) = x^2 - 5\,x + 4$; montrer que f est continue au poing $x = 1$

6. $f(x) = x^3 - 3\,x$; — — $x = 0$

7. $f(x) = x^3 + 2$; — — $x = 1$

8. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$; — — $x = 2$.

1. 2 COMPOSITION DES FONCTIONS CONTINUES

Soit f une fonction continue en x_0 et g une fonction continue en $f(x_0)$. Nous allons démontrer que la fonction $g \circ f$ est continue en x_0 en utilisant la définition que nous avons donnée de la continuité.

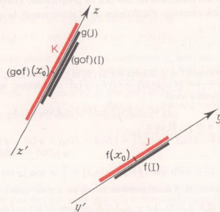
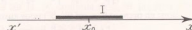


Fig. 2



Puisque g est continue en $f(x_0)$, quel que soit l'intervalle K de centre

$$g\,[f(x_0)] = (g \circ f)\,(x_0),$$

il existe un intervalle J de centre $f(x_0)$ tel que $g\,(\mathrm{J}) \subset \mathrm{K}$ (fig. 2).

Cet intervalle J étant choisi, puisque f est continue en x_0, il existe un intervalle I de centre x_0 tel que $f\,(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Nous avons donc

$$(g \circ f)\,(\mathrm{I}) \subset g\,(\mathrm{J}) \subset \mathrm{K}.$$

Par suite, quel que soit l'intervalle K de centre $(g \circ f)(x_0)$, il existe un intervalle I de centre x_0 tel que $(g \circ f)(\mathrm{I}) \subset \mathrm{K}$. Ce qui montre que la fonction $g \circ f$ est continue en x_0. On peut énoncer :

Théorème.

Si f est une fonction continue en x_0 et si g est une fonction continue en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en x_0.

1. 3 OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES EN UN POINT

Rappelons les théorèmes donnés en classe de Première.

Théorèmes.

1. Étant donnés deux fonctions f et g continues en x_0 et un nombre réel λ, les fonctions

$$f + g \quad , \quad \lambda f \quad , \quad fg$$

sont continues en x_0.

2. Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont des fonctions continues en x_0.

Les démonstrations de ces théorèmes ne sont pas au programme. Toutefois nous les donnons car elles constituent des exercices d'utilisation de la définition de la continuité à l'aide des quantificateurs.

a) *Addition.*

Soit deux fonctions f et g définies sur $]a, b[$ et continues en x_0 de $]a, b[$. La fonction $f + g : x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)$ est définie sur $]a, b[$. Pour tout $\alpha > 0$, cherchons à avoir

(1) $$|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| < \alpha;$$

quel que soit x de $]a, b[$ on a

$$|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| = |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)|$$
$$\leqslant |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|;$$

pour avoir (1) il suffit que $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\alpha}{2}$ et que $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\alpha}{2}$ ce qui est possible puisque, f étant continue en x_0, on a pour tout x réel :

$$(\exists \beta' \in \mathbb{R}_+^*) \quad |x - x_0| < \beta' \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\alpha}{2}$$

et, g étant continue en x_0, on a pour tout x réel :

$$(\exists \beta'' \in \mathbb{R}_+^*) \quad |x - x_0| < \beta'' \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\alpha}{2}$$

donc en prenant $\beta = \inf(\beta', \beta'')$ nous aurons pour tout x réel :

$$|x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| < \alpha$$

la fonction $f + g$ est continue en x_0.

b) *Multiplication par un nombre réel.*

Soit une fonction f définie sur $]a, b[$ et continue en x_0 de $]a, b[$ et λ un nombre réel donné. La fonction $\lambda f : x \longmapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ est définie sur $]a, b[$. Pour tout $\alpha > 0$, cherchons à avoir

(2) $$|\lambda f(x) - \lambda f(x_0)| < \alpha;$$

quel que soit x de $]a, b[$ on a

$$|\lambda f(x) - \lambda f(x_0)| = |\lambda [f(x) - f(x_0)]| = |\lambda| \, |f(x) - f(x_0)|;$$

si $\lambda \neq 0$, pour avoir (2) il suffit que $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\alpha}{|\lambda|}$ ce qui est possible puisque, f étant continue en x_0, on a pour tout x réel :

$$(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) \quad |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\alpha}{|\lambda|};$$

si $\lambda = 0$, on a (2) pour tout x de $]a, b[$ puisque $\lambda f(x) - \lambda f(x_0) = 0$; la fonction λf est donc continue en x_0.

c) *Multiplication.*

Soit deux fonctions f et g définies sur $]a, b[$ et continues en x_0 de $]a, b[$. La fonction $fg : x \longmapsto (fg)(x) = f(x) \times g(x)$ est définie sur $]a, b[$. Pour tout $\alpha > 0$, cherchons à avoir

(3) $$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| < \alpha;$$

quel que soit x de $]a, b[$ on a

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| = |[f(x) - f(x_0)]g(x) + [g(x) - g(x_0)]f(x_0)|$$
$$\leqslant |f(x) - f(x_0)| \, |g(x)| + |g(x) - g(x_0)| \, |f(x_0)|$$

pour avoir (3) il suffit que

(4) $$|g(x) - g(x_0)| \, |f(x_0)| < \frac{\alpha}{2}$$

et que

(5) $$|f(x) - f(x_0)| \, |g(x)| < \frac{\alpha}{2}.$$

Si $f(x_0) = 0$, on a (4) pour tout x de $]a, b[$.

Si $f(x_0) \neq 0$, on a (4) si $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\alpha}{2|f(x_0)|}$

ce qui est réalisé, puisque g est continue en x_0, pour tout x d'un intervalle I de centre x_0. Pour avoir (5) cherchons à majorer $|g(x)|$. Soit J un intervalle de centre $g(x_0)$ tel que $\mathrm{J} \subset]-\mathrm{M}, \mathrm{M}[$ ($\mathrm{M} > 0$ donné). Puisque g est continue en x_0, il existe un intervalle I' de centre x_0 tel que $g(\mathrm{I}') \subset \mathrm{J} \subset]-\mathrm{M}, \mathrm{M}[$ donc

$$(\forall x \in \mathrm{I}') \quad |g(x)| < \mathrm{M}.$$

Pour avoir (5) il suffit, x appartenant à I', que

$$|f(x) - f(x_0)| \, \mathrm{M} < \frac{\alpha}{2}$$

c'est-à-dire

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\alpha}{2\mathrm{M}}$$

ce qui est réalisé, puisque f est continue en x_0, pour tout x d'un intervalle I'' de centre x_0. Nous aurons donc, pour tout $\alpha > 0$ donné arbitraire, (4) et (5) et par conséquent (3), pour tout x de l'intervalle de centre x_0 intersection des intervalles précédents.

d) *Inverse.*

Soit une fonction g définie sur $]a, b[$, continue en x_0 de $]a, b[$ et $g(x_0) \neq 0$. Pour tout $\alpha > 0$, cherchons à avoir

(6) $$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right| < \alpha$$

c'est-à-dire $$\frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x)| \, |g(x_0)|} < \alpha$$

pour cela nous allons chercher à minorer $|g(x)|$ par un nombre $m > 0$ sur un intervalle I de centre x_0, nous aurons alors $g(x) \neq 0$ sur I donc $\frac{1}{g}$ sera définie sur I et pour avoir (6) il suffira que l'on ait $\frac{|g(x) - g(x_0)|}{m \, |g(x_0)|} < \alpha$.

Puisque g est continue en x_0, quel que soit $\alpha' > 0$ il existe un intervalle I de centre x_0 tel que pour tout x de I :

$$|g(x) - g(x_0)| < \alpha'$$

ce qui est équivalent à

$$g(x_0) - \alpha' < g(x) < g(x_0) + \alpha';$$

si $g(x_0) > 0$, nous aurons pour tout x de I :

$$0 < g(x_0) - \alpha' < g(x) < g(x_0) + \alpha'$$

en choisissant α' de manière que $0 < \alpha' < g(x_0)$;

si $g(x_0) < 0$, nous aurons pour tout x de I :

$$g(x_0) - \alpha' < g(x) < g(x_0) + \alpha' < 0,$$

en choisissant α' de manière que, $0 < \alpha' < - g(x_0)$.

Dans les deux cas on peut écrire :

$$(\forall x \in \mathrm{I}) \qquad |g(x)| > m$$

(dans le premier cas : $m = g(x_0) - \alpha'$, dans le second cas : $-m = g(x_0) + \alpha'$).

Pour avoir (6) pour tout $\alpha > 0$ il suffit, x appartenant à I, que $\dfrac{|g(x) - g(x_0)|}{m\,|g(x_0)|} < \alpha$

ou encore que $|g(x) - g(x_0)| < \alpha\, m\, |g(x_0)|$ ce qui est réalisé, puisque g est continue en x_0, pour tout x d'un intervalle I' de centre x_0. On aura donc (6) pour tout x de $\mathrm{I} \cap \mathrm{I'}$ qui est un intervalle de centre x_0.

e) Quotient.

Soit deux fonctions f et g définies sur $]a, b[$ et continues en x_0 de $]a, b[$. Supposons $g(x_0) \neq 0$. On vient de voir qu'il existe un intervalle I de centre x_0 tel que, pour tout x de I, $g(x) \neq 0$ donc

$$(\forall x \in \mathrm{I}) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$$

la fonction $\frac{1}{g}$ est continue en x_0, la fonction f est continue en x_0 donc le produit $f \times \frac{1}{g}$ est continu en x_0.

Applications.

Pour démontrer qu'une fonction est continue en un point, au lieu d'utiliser la définition il est souvent plus commode d'utiliser les théorèmes précédents sur les opérations et la composition de fonctions continues. Ainsi la fonction constante : $x \longmapsto \lambda$ (λ réel donné) et la fonction identique : $x \longmapsto x$ définies sur $\mathbb{R}$ étant continues en tout point de $\mathbb{R}$, toute fonction déduite de ces deux fonctions par un nombre fini d'additions et de multiplications sera continue en tout point de $\mathbb{R}$. Par exemple, quel que soit n entier strictement positif la fonction : $x \longmapsto x^n$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$ et **toute fonction polynôme :** $x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ **est continue en tout point de** $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle, quotient de deux fonctions polynômes, est continue en tout point où elle est définie.

EXERCICE

Montrer que la fonction : $x \longmapsto \sin(x^2 + 3x - 1)$ définie sur $\mathbb{R}$, est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
(On a vu, dans le cours de Première, que la fonction : $x \longmapsto \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$, est continue en tout point de $\mathbb{R}$).

1. 4 CONTINUITÉ A DROITE, CONTINUITÉ A GAUCHE

Définitions.

Soit une fonction f définie en x_0 et à droite de x_0 c'est-à-dire qu'il existe $h > 0$ tel que f soit définie sur $[x_0, x_0 + h[$. On dit que f est **continue à droite** en x_0 si et seulement si, quel que soit l'intervalle J de centre $f(x_0)$, il existe un intervalle $\mathrm{I} = [x_0, x_0 + \beta[$ $(\beta > 0)$ tel que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

La continuité à droite en x_0 peut s'écrire avec les quantificateurs :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x \in [x_0, x_0 + \beta[)\quad |f(x) - f(x_0)| < \alpha.$$

Elle peut aussi s'énoncer : quel que soit $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout x réel on ait :

$$0 \leqslant x - x_0 < \beta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha.$$

On définira de même la **continuité à gauche** en x_0 sous l'une des trois formes équivalentes analogues aux précédentes, par exemple :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x \in]x_0 - \beta, x_0])\quad |f(x) - f(x_0)| < \alpha.$$

Remarque.

Il en résulte que pour qu'une fonction soit continue au point x_0 il faut et il suffit qu'elle soit continue à droite et à gauche au point x_0.

Exemple.

Si x est un nombre réel quelconque, il existe un entier relatif n tel que $n \leqslant x < n + 1$. Cet entier relatif s'appelle la partie entière de x que nous désignerons par E (x). Soit la fonction f : $x \longmapsto \mathrm{E}(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ et appelée *fonction partie entière*, on a par exemple :

si	$-1 \leqslant x < 0$	$\mathrm{E}(x) = -1,$
si	$0 \leqslant x < 1$	$\mathrm{E}(x) = 0,$
si	$1 \leqslant x < 2$	$\mathrm{E}(x) = 1,$
si	$2 \leqslant x < 3$	$\mathrm{E}(x) = 2 \quad \ldots$

La représentation graphique de f est la réunion de segments parallèles à $x'x$, les extrémités de gauche de ces segments (représentées par un gros point sur la figure 3) font partie de la représentation graphique alors que les extrémités de droite n'en font pas partie.

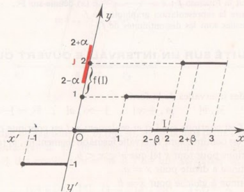


Fig. 3

On peut écrire pour tout nombre réel x :

$$2 \leqslant x < 3 \Longrightarrow f(x) = f(2) = 2$$

ou encore, quel que soit $\alpha > 0$:

$$0 \leqslant x - 2 < 1 \Longrightarrow |f(x) - f(2)| < \alpha,$$

ce qui montre que f est continue à droite pour $x = 2$.

1.5 FONCTION DISCONTINUE EN UN POINT

Soit une fonction f définie sur un intervalle de centre x_0. On dit qu'elle est *discontinue* au point x_0 ou qu'elle présente une *discontinuité* au point x_0 si elle n'est pas continue au point x_0. Reprenons l'exemple précédent. La fonction $f : x \longmapsto E(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est discontinue au point $x_0 = 2$. (On s'assurera qu'il en est de même pour toutes les valeurs entières de x). Choisissons α tel que $0 < \alpha < 1$. *Quel que soit* l'intervalle $I =]2 - \beta, 2 + \beta[$, $(\beta > 0)$, de centre $x_0 = 2$ *il existe* des nombres x de I tels que $|f(x) - f(2)| \geqslant \alpha$.

En effet sur la représentation graphique (fig. 3) on voit que, quel que soit I, $f(I)$ comprend 1 qui est extérieur à $J =]f(2) - \alpha, f(2) + \alpha[$. Nous avons donc prouvé l'assertion suivante

(1) $\quad (\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall\, \beta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists\, x \in]2 - \beta, 2 + \beta[)\quad |f(x) - f(2)| \geqslant \alpha,$

qui signifie que f est discontinue au point $x_0 = 2$.

Nous vérifions sur cet exemple que cette assertion est la négation de

(2) $\quad (\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists\, \beta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall\, x \in]2 - \beta, 2 + \beta[)\quad |f(x) - f(2)| < \alpha$

qui exprime que f est continue en $x_0 = 2$.

Observez bien la place et la nature des quantificateurs.

EXERCICES

1. Soient la fonction f en escalier sur $[1, 4]$ définie par : $f(x) = 2$ si $1 < x < 2$, $f(x) = -1$ si $2 < x < 3$, $f(x) = \frac{1}{2}$ si $3 < x < 4$,

   et par $f(1) = 5$, $f(2) = 2$, $f(3) = 0$, $f(4) = \frac{1}{2}$.

   Faire la représentation graphique de f.
   Étudier si f est continue ou discontinue aux points 2, 3.

2. Soit la fonction $f : x \longmapsto x - E(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
   Faire la représentation graphique de f.
   Quelles sont les discontinuités de f?

1.6 CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE OUVERT OU FERMÉ

a) Définitions.

Soit I l'un des intervalles de la forme :

$$]a, b[\quad, \quad]a, +\infty[\quad, \quad]-\infty, a[\quad, \quad \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[,$$

On dit que f est continue sur I si et seulement si f est continue pour tout point x de I.
On dit que f est continue sur l'intervalle fermé ou segment $[a, b]$ $(a < b)$ si et seulement si :

1. f est continue pour tout x tel que $a < x < b$.
2. f est continue à droite pour $x = a$.
3. f est continue à gauche pour $x = b$.

EXERCICE

Donner la définition d'une fonction continue sur $[a, +\infty[$, sur $]-\infty, a]$.

REMARQUE

Soit I un intervalle ouvert ou fermé. Désignons par $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques continues sur I. On définit l'addition des fonctions appartenant à cet ensemble par :
si f et g sont deux éléments quelconques de cet ensemble, la somme $f + g$ est définie sur I de la manière suivante :

$$(\forall \in I) \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

On définit la multiplication de ces fonctions par :
si f et g sont deux éléments quelconques de cet ensemble, le produit $f \times g$ est défini sur I de la manière suivante :

$$(\forall\, x \in I) \qquad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$

On définit la multiplication d'une fonction par un nombre réel par :
si f est un élément quelconque de cet ensemble et λ un nombre réel quelconque, le produit de f par λ noté $\lambda.f$ est défini sur I de la manière suivante :

$$(\forall\, x \in I) \qquad (\lambda.f)(x) = \lambda f(x).$$

On démontre que :
$(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
$(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) Théorème fondamental.

Conformément au programme, nous admettrons le résultat fondamental suivant :

Théorème.

Si f est une fonction continue sur un segment, l'image par f de ce segment est un segment.

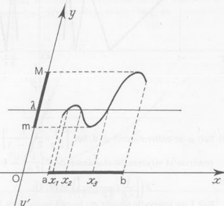


Fig. 4

Soit $[m, M]$ l'image du segment $[a, b]$ (fig. 4), m est la plus petite valeur de f sur $[a, b]$ et M sa plus grande valeur. Le théorème permet d'affirmer l'existence, lorsque f est continue sur $[a, b]$, des nombres m et M et f est une **surjection** de $[a, b]$ sur $[m, M]$ c'est-à-dire que :

$$(\forall\, \lambda \in [m, M])\ (\exists\ x \in [a, b]) \qquad f(x) = \lambda.$$

Remarques.

1. La condition : « f continue sur un segment » est une *condition suffisante* pour que l'image de ce segment soit un segment. Mais cette *condition n'est pas nécessaire* : l'image d'un segment peut être un segment sans que f soit continue. Donnons-en un exemple.

Soit la fonction numérique f définie sur $[-1, +1]$ de la manière suivante :

1. *Pour tout entier naturel non nul n*

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \textit{si n est pair,}$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad \textit{si n est impair.}$$

2. *Pour tout entier naturel non nul n, f coïncide sur* $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ *avec une fonction affine* (*c'est-à-dire* $f(x) = ax + b$).

3. *La fonction f est paire sur* $[-1, +1]$ (*c'est-à-dire que pour tout x de* $[-1, +1]$ *on a* $f(-x) = f(x)$).

4. *Enfin* $f(0) = 0$.

Il est impossible de dessiner toute la représentation graphique de la fonction f; cependant la figure 5 donne une idée de cette représentation graphique. Remarquons que, quel que soit x de $[-1, +1]$ on a

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

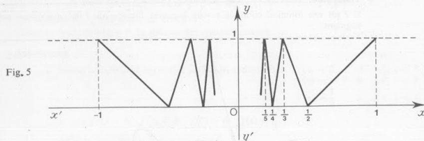


Fig. 5

a) Soit p un entier naturel $\neq 0$. Sur $\left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right]$ f coïncide avec une fonction affine continue et strictement croissante de $f\left(\frac{1}{2p}\right) = 0$ à $f\left(\frac{1}{2p-1}\right) = 1$ donc

$$f\left(\left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right]\right) = [0, 1].$$

Soit I un intervalle (ouvert ou fermé) inclus dans $[-1, +1]$ mais contenant

$$\left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right]$$

$$\left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right] \subset \mathrm{I} \Longrightarrow f\left(\left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right]\right) \subset f(\mathrm{I})$$

c'est-à-dire

$$[0, 1] \subset f(\mathrm{I})$$

Mais pour tout x de $[-1, +1]$, $f(x) \in [0, 1]$ donc $f(\mathrm{I}) \subset [0, 1]$ donc $f(\mathrm{I}) = [0, 1]$.

Ainsi *l'image par f de tout segment* $\left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right]$ *et de tout intervalle* I *inclus dans* $[-1, +1]$ *contenant* $\left[\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right]$ *est le segment* $[0, 1]$.

b) Cela est vrai en particulier si on prend $\mathrm{I} = \left[-\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right]$.

L'image du segment $\left[-\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right]$ *est le segment* $[0, 1]$ *mais f n'est pas continue sur* $\left[-\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p-1}\right]$ *car elle n'est pas continue pour* $x = 0$. En effet si on prend

$$\mathrm{I} =]-h, h[\quad (0 < h \leqslant 1),$$

on peut trouver un entier naturel q tel que $0 < \frac{1}{2q} < \frac{1}{2q-1} < h$; il suffit de prendre $2q - 1 > \frac{1}{h}$ c'est-à-dire $q > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h} + 1\right)$. On peut alors appliquer le résultat *a*) où l'on remplace p par q. L'image de tout intervalle $\mathrm{I} =]-h, h[$ $(0 < h \leqslant 1)$ de centre O est donc $[0, 1]$. Par suite f n'est pas continue pour $x = 0$ car si par exemple $\mathrm{J} = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ on ne peut trouver I tel que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

2. Si f est continue sur un segment l'image de ce segment est un segment. Mais l'image d'un intervalle *ouvert* par une fonction continue *n'est pas nécessairement ouvert*. Soit, par exemple, $f : x \longmapsto x^2$, l'image par f de $]-1, +1[$ est $[0, 1[$.

1. 7 FONCTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION CONTINUE STRICTEMENT MONOTONE SUR UN SEGMENT

a) Existence.

Soit une fonction f continue, strictement *croissante* sur un segment $[a, b]$. L'image de $[a, b]$ par f est un segment $[m, \mathrm{M}] = [f(a), f(b)]$ (fig. 6).

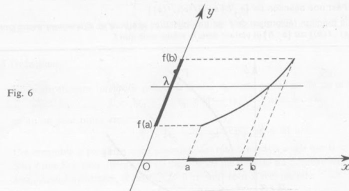


Fig. 6

La fonction f (cf. § 1. 6) est une surjection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Mais f étant strictement croissante sur $[a, b]$, quels que soient x_1 et x_2 de $[a, b]$ on a

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

donc quels que soient x_1 et x_2 de $[a, b]$:

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

ce qui exprime que f est injective. Donc f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ c'est-à-dire que l'équation $f(x) = \lambda$ (λ donné quelconque de $[f(a), f(b)]$, x cherché dans $[a, b]$) a une solution unique (fig. 6). La fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} qui est une bijection de $[f(a), f(b)]$ sur $[a, b]$.

b) Sens de variation.

Supposons toujours que f soit continue, strictement croissante sur $[a, b]$. Quels que soient y_1 et y_2 distincts de $[f(a), f(b)]$, posons

$$x_1 = f^{-1}(y_1) \quad \text{donc} \quad y_1 = f(x_1)$$
$$x_2 = f^{-1}(y_2) \quad \text{donc} \quad y_2 = f(x_2)$$

le taux d'accroissement de f^{-1} entre y_1 et y_2 est

$$\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

qui est strictement positif puisque f est strictement croissante sur $[a, b]$. Donc f^{-1} est strictement croissante sur $[f(a), f(b)]$.

c) Continuité.

Conformément au programme, nous admettrons que si f est continue strictement croissante sur $[a, b]$, sa fonction réciproque f^{-1} est continue sur $[f(a), f(b)]$.

Si f est continue, strictement *décroissante* sur $[a, b]$, on démontre de même que f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ et que f^{-1} est aussi strictement décroissante sur $[f(a), f(b)]$. Nous admettrons encore que f^{-1} est continue sur $[f(a), f(b)]$. On peut donc énoncer :

Théorème.

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a, b]$,

1. f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$,
2. la fonction réciproque de f est une bijection continue et strictement monotone de $[f(a), f(b)]$ sur $[a, b]$ et variant dans le même sens que f.

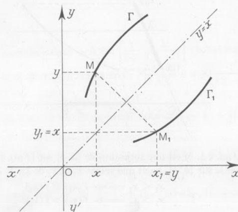


Fig. 7

d) Représentation graphique.

Soient Γ et Γ_1 les représentations graphiques de f et f^{-1} dans un *même* repère orthonormé. Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan et $M_1(x_1 = y, y_1 = x)$, ces deux points sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ appelée première bissectrice du repère orthonormé (fig. 7). On peut écrire les équivalences suivantes :

$$M \in \Gamma \Longleftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x \in [a, b] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in [f(a), f(b)] \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = f^{-1}(x_1) \\ x_1 \in [f(a), f(b)] \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow M_1 \in \Gamma_1$$

Théorème.

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un segment, les représentations graphiques de f et de sa fonction réciproque f^{-1} dans un **même repère orthonormé,** sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.

EXERCICES

1. Soit la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par :
$$f(x) = \cos x.$$
Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[-1, +1]$. Sens de variation et représentation graphique de f^{-1}.

2. Mêmes questions avec la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par :
$$f(x) = \sin x.$$

II. Limites

1. 8 CONTINUITÉ ET LIMITE EN UN POINT

a) Définitions.

Nous appellerons *intervalle pointé de centre* x_0 toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme

$$I' =]x_0 - h, x_0 + h[- \{x_0\} \qquad \text{avec } h > 0.$$

ce qu'on peut noter encore

$$I' =]x_0 - h, x_0[\cup]x_0, x_0 + h[.$$

Cet ensemble n'est autre que l'ensemble des nombres réels x tels que $0 < |x - x_0| < h$. Soit f une fonction définie sur I'. Supposons qu'il existe un nombre réel l tel que, $\alpha > 0$ étant donné arbitraire, il existe $\beta > 0$ et pour tout x réel on ait :

(1) $$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) - l| < \alpha.$$

Soit g une fonction continue en x_0 c'est-à-dire que la fonction est définie sur un intervalle de centre x_0 et que, $\alpha > 0$ étant donné arbitrairement, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout x réel :

(2) $$|x - x_0| < \beta \Longrightarrow |g(x) - g(x_0)| < \alpha.$$

Nous voyons qu'une fonction possédant la propriété (2) est un *cas particulier* de fonctions possédant la propriété (1) car, on a, de plus

1. g définie en x_0
2. $g(x_0) = l$.

Nous allons étudier le cas *plus général* de fonctions possédant la propriété (1). Traitons d'abord quelques exemples dans lesquels f possède la propriété (1) et où l'on cherchera g possédant la propriété (2).

Exemple 1. Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^2}{|x|}$ définie sur $\mathbb{R}^*$,

si $x > 0$ $\quad f(x) = x$
si $x < 0$ $\quad f(x) = -x$

et f n'est pas définie, donc n'est pas continue, pour $x = 0$. Sa représentation graphique est la réunion de deux demi-droites ouvertes d'origine O (fig. 8).

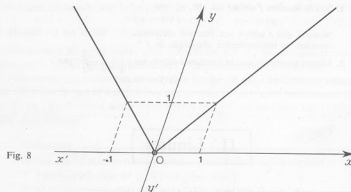


Fig. 8

Soit la fonction g coïncidant avec f sur $\mathbb{R}^*$ c'est-à-dire que si $x \neq 0$, $g(x) = f(x)$. Supposons, de plus, que $g(0) = 0$. La fonction g est continue pour $x = 0$ car quel que soit $\alpha > 0$ en prenant $\beta = \alpha$ on a, pour tout x réel, l'implication (2) précédente :

(2) $$|x - 0| < \beta \Longrightarrow |g(x) - g(0)| < \alpha.$$

On peut aussi écrire, pour tout x réel, l'implication (1) précédente :

(1) $$0 < |x - 0| < \beta \Longrightarrow |f(x) - 0| < \alpha.$$

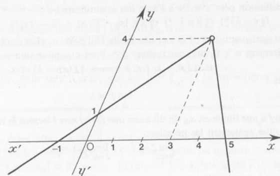
On dit que la limite de f au point $x_0 = 0$ est 0. On dit aussi que g est un prolongement par continuité de f en $x_0 = 0$.

Exemple 2. Soit la fonction f définie de la façon suivante sur $\mathbb{R} - \{3\}$:

si $x < 3$ $\quad f(x) = x + 1$
si $x > 3$ $\quad f(x) = 2(5 - x)$

la fonction f n'est pas définie, donc n'est pas continue, pour $x = 3$. Sa représentation graphique est la réunion de deux demi-droites ouvertes (fig. 9).

Fig. 9



Soit la fonction g coïncidant avec f sur $\mathbb{R} - \{3\}$, c'est-à-dire que si $x \neq 3$, $g(x) = f(x)$. Supposons, de plus, que $g(3) = 4$. Quel que soit $\alpha > 0$, cherchons à avoir $|g(x) - 4| < \alpha$.

Si $x \leqslant 3$ on a $|g(x) - 4| = |x + 1 - 4| = |x - 3|$
Si $x \geqslant 3$ on a $|g(x) - 4| = |2(5 - x) - 4| = |6 - 2x| = 2|x - 3|$, en prenant $\beta = \frac{\alpha}{2}$ nous aurons pour tout x réel :

(2) $$|x - 3| < \beta \Longrightarrow |g(x) - g(3)| < \alpha$$

donc g est continue en $x_0 = 3$, et aussi pour tout x réel :

(1) $$0 < |x - 3| < \beta \Longrightarrow |f(x) - 4| < \alpha.$$

On dit que la limite de f au point $x_0 = 3$ est 4. On dit aussi que g est un prolongement par continuité de f en $x_0 = 3$.

Exemple 3. Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$. En remarquant que $2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$, on peut écrire pour $x \neq 1$, $f(x) = 2x + 1$. La représentation graphique de f est une droite, le point (1,3) exclu. Soit la fonction $g : x \longmapsto 2x +$ définie sur $\mathbb{R}$, elle coïncide avec f sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et elle est continue pour $x_0 = 1$ (puisqu'une fonction polynôme est continue pour tout x réel (cf. § 1.3). On dit, là encore, que la limite de f au point $x_0 = 1$ est $g(1) = 3$ et que g est un prolongement par continuité de f en $x_0 = 1$. Plus généralement :

Définitions.

Soit une fonction f définie sur un intervalle pointé I' de centre x_0 et définie ou non en x_0. Si l'on sait trouver une fonction g coïncidant avec f sur I' et continue en x_0, on dit que f admet une **limite en x_0** qui est $g(x_0)$. Dans le cas où f n'est pas définie en x_0, on dit aussi que g est un **prolongement par continuité** de f en x_0.

On peut dire aussi, en tenant compte de la définition d'une fonction continue en un point :

Une fonction f définie sur un intervalle pointé de centre x_0 admet une limite l au point x_0 si et seulement si, quel que soit l'intervalle J de centre l, il existe un intervalle pointé I' de centre x_0 tel que $f(\text{I}') \subset \text{J}$.

Cette définition peut s'écrire à l'aide des quantificateurs :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x \in]x_0 - \beta, x_0 + \beta[- \{x_0\})\quad |f(x) - l| < \alpha.$$

On peut également dire : f admet une limite l au point x_0 si et seulement si, étant donné arbitrairement $\alpha > 0$, on peut trouver $\beta > 0$ tel que pour tout x réel on ait :

$$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) - l| < \alpha.$$

On écrit :

$$\lim_{x_0} f = l.$$

Lorsque f a une limite en x_0, on dit aussi que *f tend vers l lorsque la variable x tend vers x_0* et on utilise également les notations

$$\lim_{x \to x_0} f = l \quad , \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

REMARQUES

1. Observons bien cette définition et celle d'une fonction continue en un point. Nous avons écrit ici :
$0 < |x - x_0| < \beta$ au lieu de $|x - x_0| < \beta$ et $|f(x) - l| < \alpha$ au lieu de $|f(x) - f(x_0)| < \alpha$. Ici *la valeur de f en x_0 n'intervient pas.* La fonction f peut être définie ou non en x_0. Si, par exemple, f et f_1 prennent les mêmes valeurs en tout point d'un intervalle pointé de centre x_0, supposons qu'elles soient toutes deux définies en x_0 avec $f(x_0) \neq f_1(x_0)$ ou bien que l'une d'elles soit définie en x_0 et l'autre non; si l'une de ces fonctions a une limite l en x_0, l'autre a la même limite en x_0.
Dans l'exemple 2 précédent, soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par :

$$\text{si } x < 3 \quad f(x) = x + 1$$
$$\text{si } x > 3 \quad f(x) = 2(5 - x).$$

On a vu que la fonction g coïncidant avec f sur $\mathbb{R} - \{3\}$ et telle que $g(3) = 4$ est un prolongement par continuité de f en $x_0 = 3$. On peut construire une infinité d'autres prolongements de f à $\mathbb{R}$: soit la fonction f_1 coïncidant avec f sur $\mathbb{R} - \{3\}$ et telle que $f_1(3) = \lambda \neq 4$, f_1 n'est pas continue en $x_0 = 3$ mais on a encore :

$$\lim_{x \to 3} f_1 = \lim_{x \to 3} f = g(3) = 4.$$

2. Si l'on emploie l'expression « *f tend vers l, lorsque x tend vers x_0* » on ne peut dissocier les deux affirmations « f tend l » et « lorsque x tend vers x_0 »; chacune de ces affirmations prises séparément n'a pas de signification.

3. Il résulte de la définition d'une limite qu'*une fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle a une limite en x_0 et si cette limite est $f(x_0)$.*

EXERCICES

Calculer $\lim_{x \to x_0} f$ et trouver un prolongement par continuité en x_0 de la fonction f qui associe à tout nombre réel x le nombre suivant, quand il existe :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$, $x_0 = a$.

2. $f(x) = \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

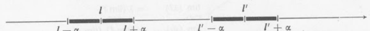
3. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2x - 4}{x + 1}$, $x_0 = -1$ (poser $x = -1 + h$).

4. $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{\sin x}$, $x_0 = 0$.

5. $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \sin x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Propriétés.

Montrons que si f admet une limite l au point x_0, cette limite est unique. Supposons qu'au point x_0 une fonction f ait deux limites distinctes l et l', $l < l'$ pour fixer les idées. Choisissons $\alpha > 0$ de manière que les intervalles $]l - \alpha, l + \alpha[$ et $]l' - \alpha, l' + \alpha[$ soient disjoints. Pour cela il suffit que $l + \alpha < l' - \alpha$ $\left(\text{c'est-à-dire } \alpha < \dfrac{l' - l}{2}\right)$.



Le nombre α étant ainsi choisi, il existe un nombre β strictement positif tel que : $0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x) - l| < \alpha$ et il existe un nombre β' strictement positif tel que : $0 < |x - x_0| < \beta' \Longrightarrow |f(x) - l'| < \alpha$. Soit alors $\beta'' = \inf(\beta, \beta')$, pour tout x vérifiant $0 < |x - x_0| < \beta''$ on aurait simultanément $|f(x) - l| < \alpha$ et $|f(x) - l'| < \alpha$ c'est-à-dire encore

$$l - \alpha < f(x) < l + \alpha \quad \text{et} \quad l' - \alpha < f(x) < l' + \alpha$$

ce qui est impossible puisque les intervalles $]l - \alpha, l + \alpha[$ et $]l' - \alpha, l' + \alpha[$ sont disjoints. Donc

> Si f admet une limite au point x_0, cette limite est unique.

Supposons que f admette en x_0 une limite $l \neq 0$. Supposons par exemple $l > 0$, choisissons α tel que $0 < \alpha < l$, alors on a $0 < l - \alpha < l + \alpha$; il existe $\beta > 0$ tel que

$$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow 0 < l - \alpha < f(x) < l + \alpha,$$

c'est-à-dire

$$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow f(x) > 0.$$

EXERCICE

Démontrer le même résultat pour $l < 0$.

Concluons :

> Si en x_0 la fonction f admet une *limite non nulle l*, il existe un intervalle pointé I' de centre x_0, tel que pour tout x de I', $f(x)$ et l soient même de signe.

c) Opérations sur les fonctions ayant une limite en un point.

Il résulte de la définition *initiale* que nous avons donnée de la limite en un point que les résultats relatifs aux opérations sur les limites en x_0 sont des *conséquences immédiates* de ceux relatifs aux opérations sur les fonctions continues en x_0.
Soit, en effet, deux fonctions f et g définies sur un intervalle pointé I' de centre x_0 (si les intervalles pointés de centre x_0 sont différents, I' est l'intersection de ces deux intervalles).
Supposons que f et g aient des limites l et l' en x_0 c'est-à-dire que l'on sache trouver deux fonctions f_1 et g_1 coïncidant respectivement avec f et g sur I' et continues en x_0. On a

$$l = f_1(x_0) \quad , \quad l' = g_1(x_0).$$

La somme $f_1 + g_1$ coïncide avec $f + g$ sur I' et $f_1 + g_1$, somme de deux fonctions continues en x_0, est continue en x_0 donc $f + g$ a une limite en x_0 qui est

$$f_1(x_0) + g_1(x_0) = l + l'.$$

On démontre de même les autres théorèmes que nous énonçons :

Théorèmes.

1. Étant donnés deux fonctions f et g ayant chacune une limite en x_0 et un nombre réel λ, les fonctions $f+g$, λf, fg ont une limite en x_0 et on a

$$\lim_{x \to x_0} (f+g) = \lim_{x \to x_0} f + \lim_{x \to x_0} g$$
$$\lim_{x \to x_0} (\lambda f) = \lambda (\lim_{x \to x_0} f)$$
$$\lim_{x \to x_0} (fg) = (\lim_{x \to x_0} f)(\lim_{x \to x_0} g).$$

2. Étant données deux fonctions f et g ayant chacune une limite en x_0, la limite de g étant **non nulle**, les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ ont une limite en x_0 et on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} g}$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x \to x_0} f}{\lim_{x \to x_0} g}$$

d) Composition.

Soit f une fonction ayant une *limite* l en x_0 et g une fonction *continue* en l. La fonction f étant définie sur un intervalle pointé I' de centre x_0, on sait trouver une fonction f_1 coïncidant avec f sur I' et continue en x_0. Les deux fonctions f_1 et g étant continues respectivement en x_0 et en $f_1(x_0) = l$, la composée $g \circ f_1$ est aussi continue en x_0 (cf. § 1.2) la fonction $g \circ f_1$ coïncide avec $g \circ f$ sur un intervalle pointé de centre x_0, il en résulte que $g \circ f$ a une limite en x_0 qui est

$$(g \circ f_1)(x_0) = g[f_1(x_0)] = g(l).$$

On peut énoncer :

Théorème.

Si f a une limite l en x_0 et si g est une fonction continue en l, la fonction composée $g \circ f$ a une limite en x_0 qui est $g(l)$.

1. 9 EXTENSIONS DE LA NOTION DE LIMITE

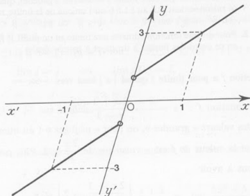
a) Limite à droite, limite à gauche.

Exemple. Soit la fonction $f: x \longmapsto \dfrac{2x^2 + |x|}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$,

si $x > 0$ $\quad f(x) = 2x + 1$
si $x < 0$ $\quad f(x) = 2x - 1.$

La représentation graphique de f est la réunion de deux demi-droites ouvertes (fig. 10). Soit la fonction $g: \quad x \longmapsto 2x + 1$ définie sur $[0, +\infty[$, elle coïncide avec f sur $]0, +\infty[$ et elle est continue à droite en $x_0 = 0$ (puisque la fonction affine : $x \longmapsto 2x + 1$ est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$, elle est donc continue à droite en x_0). On dit que la limite de f à droite en $x_0 = 0$ est $g(0) = 1$.

Fig. 10



Soit la fonction $g_1: \quad x \longmapsto 2x - 1$ définie sur $]-\infty, 0]$, elle coïncide avec f sur $]-\infty, 0[$ et elle est continue à gauche en $x_0 = 0$ (puisque la fonction affine : $x \longmapsto 2x - 1$ est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$, elle est donc continue à gauche en x_0). On dit que la limite de f à gauche en $x_0 = 0$ est $g_1(0) = -1$.
Plus généralement :

Définition.

Soit une fonction f définie à droite de x_0 c'est-à-dire qu'il existe $h > 0$ tel que f soit définie sur $]x_0, x_0 + h[$. Si l'on sait trouver une fonction g coïncidant avec f sur $]x_0, x_0 + h[$ et continue à droite en x_0, on dit que f admet une **limite à droite en x_0** qui est $g(x_0)$.

On peut remplacer cet énoncé par :
Une fonction f définie à droite de x_0 admet une limite l à droite au point x_0 (ou tend vers l quand x tend vers x_0 à droite) si et seulement si, quel que soit l'intervalle J de centre l, il existe un intervalle $I =]x_0, x_0 + \beta[\quad (\beta > 0)$ tel que $f(I) \subset J$.

Cette définition peut s'écrire à l'aide des quantificateurs :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) \ (\forall x \in]x_0, x_0 + \beta[) \quad |f(x) - l| < \alpha.$$

On peut également dire : f admet une limite l à droite au point x_0 si et seulement si, étant donné arbitrairement $\alpha > 0$, on peut trouver $\beta > 0$ tel que pour tout x réel on ait :

$$0 < x - x_0 < \beta \Longrightarrow |f(x) - l| < \alpha.$$

On écrit :

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f = l \quad , \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = l.$$

Vous définirez de même une **limite** l **à gauche** en x_0 sous l'une des quatre formes équivalentes analogues aux précédentes, par exemple :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) \ (\forall x \in]x_0 - \beta, x_0[) \quad |f(x) - l| < \alpha,$$

et on écrit

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f = l, \quad , \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = l.$$

REMARQUES

1. On démontre que cette limite à droite (ou à gauche), quand elle existe, est unique (dans le raisonnement fait au § 1.8 b sur l'unicité de la limite, remplacer $0 < |x - x_0| < \beta$ (ou β' ou β'') par $0 < x - x_0 < \beta$ ou par $-\beta < x - x_0 < 0$).
2. Pour qu'une fonction admette une limite en un point il faut et il suffit qu'elle admette en ce point des limites à droite et à gauche égales.

b) La fonction f a pour limite l quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$ définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$. On conçoit que si $|x|$ prend des valeurs « grandes », on peut « négliger » 1 au numérateur et -3 au dénominateur et la valeur de f est « voisine » de $\dfrac{2x}{x} = 2$. Plus précisément pour tout $\alpha > 0$ cherchons à avoir

$$(1) \qquad \left| \frac{2x+1}{x-3} - 2 \right| < \alpha.$$

Or pour tout x de $\mathbb{R}$ on a

$$(1) \iff \left| \frac{2x+1-2(x-3)}{x-3} \right| < \alpha \iff \frac{7}{|x-3|} < \alpha \iff |x-3| > \frac{7}{\alpha},$$

ou encore

$$(1) \iff \left(x - 3 > \frac{7}{\alpha} \quad \text{ou} \quad x - 3 < -\frac{7}{\alpha} \right).$$

Pour avoir (1) il suffit que $x > 3 + \dfrac{7}{\alpha}$ ou que $x < 3 - \dfrac{7}{\alpha}$, cette dernière inégalité sera vérifiée si $x < -\left(3 + \dfrac{7}{\alpha}\right)$ l'est. Donc pour avoir (1) il suffit que $|x| > 3 + \dfrac{7}{\alpha}$. On est alors conduit aux trois définitions suivantes :

---

1. Soit une fonction f définie sur $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ $(a \leqslant b)$. On dit que f a pour limite le nombre réel l (ou que f tend vers l) quand $|x|$ tend vers $+\infty$ si et seulement si, quel que soit le nombre réel strictement positif α donné à l'avance, il est possible de trouver un nombre réel strictement positif β tel que pour tout nombre réel x on ait $\quad |x| > \beta \Longrightarrow |f(x) - l| < \alpha.$

De façon plus condensée :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) \ (\forall x \in]-\infty, -\beta[\cup]\beta, +\infty[) \qquad |f(x) - l| < \alpha$$

on écrit $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f = l$ ou encore $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = l$.

Exemple : $\qquad \lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = 2.$

2. *Soit une fonction f définie sur $]a, +\infty[$. On dit que f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si on a*

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) \ (\forall x \in]\beta, +\infty[) \qquad |f(x) - l| < \alpha.$$

On écrit : $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f = l$ ou encore $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Exemple : $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = 2.$

3. *Soit une fonction f définie sur $]-\infty, a[$. On dit que f a pour limite l quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si on a*

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) \ (\forall x \in]-\infty, -\beta[) \qquad |f(x) - l| < \alpha.$$

On écrit : $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f = l \quad$ ou $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l.$

Exemple : $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x-3} = 2.$

REMARQUE

On démontrera l'unicité de la limite en s'inspirant de la démonstration de § 1.8 b.

EXERCICE

1. En appliquant la définition calculer $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{x+2}{x-1}$ et $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{5x^2+3}{x^2}$.

c) La fonction $|f|$ a pour limite $+\infty$ en un point x_0.

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$. Si $|x - 2|$ est de plus en plus « petit »,

$\lvert x-2 \rvert$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	...
$\dfrac{1}{\lvert x-2 \rvert}$	10^{3}	10^{4}	10^{5}	...

On voit que $\dfrac{1}{|x-2|}$ est de plus en plus « grand ».

Plus précisément pour tout $\alpha > 0$ on a pour tout x réel :

$$0 < |x-2| < \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow \left| \frac{1}{x-2} \right| > \alpha.$$

Plus généralement soit une fonction f définie sur $]a, b[$, sauf peut-être en x_0 de $]a, b[$. Rappelons que l'on appelle **valeur absolue de f**, que l'on note $|f|$, la fonction définie sur le même ensemble que f et qui associe à x le nombre $|f(x)|$. Nous poserons la définition suivante : Soit une fonction f définie sur un intervalle pointé de centre x_0.

On dit que $|f|$ a pour limite $+\infty$ au point x_0 (ou que $|f|$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0) si et seulement si, quel que soit le nombre réel $\alpha > 0$, il est possible de trouver un nombre réel $\beta > 0$ tel que pour tout nombre réel x on ait

$$0 < |x - x_0| < \beta \Longrightarrow |f(x)| > \alpha.$$

De façon plus condensée :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) \ (\forall x \in]x_0 - \beta, x_0 + \beta[- \{x_0\}) \qquad |f(x)| > \alpha.$$

On écrit $\lim\limits_{x\to x_0} |f| = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.

On obtiendra quatre nouvelles définitions suivant les signes de $x - x_0$ et de $f(x)$. Ainsi dans l'exemple précédent :

$$0 < x - 2 < \frac{1}{\alpha} \Longrightarrow \frac{1}{x-2} > \alpha.$$

On écrit $\lim\limits_{x\to 2+0} f = +\infty$.

De même
$$-\frac{1}{\alpha} < x - 2 < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x-2} < -\alpha.$$

On écrit $\lim\limits_{x\to 2-0} f = -\infty$.

EXERCICES

En appliquant les définitions, étudier :

2. $\lim\limits_{x\to -2+0} \dfrac{5x+1}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to -2-0} \dfrac{5x+1}{x+2}$ (poser $x + 2 = h$).

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2+3}{x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{(x-1)^2}$ (poser $x - 1 = h$).

5. Étudier la limite de f : $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) quand x tend vers 0.

d) La fonction $|f|$ a pour limite $+\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

Soit la fonction f : $x \longmapsto x^3$ définit sur $\mathbb{R}$. Si $|x|$ est de plus en plus « grand »,

$\lvert x \rvert$	10^3	10^4	10^5	...
$\lvert x^3 \rvert$	10^9	10^{12}	10^{15}	...

on voit que $|x|$ est de plus en plus « grand ».
Plus précisément pour tout $\alpha > 0$ cherchons à avoir :

$$|x^3| > \alpha;$$

si $|x| > 1$, en multipliant les deux membres de cette dernière inégalité par $|x|$ on a $x^2 > |x|$; en multipliant les deux membres de cette dernière inégalité par $|x|$ on a $|x^3| > x^2$ d'où $|x^3| > |x|$.
Soit alors $\beta = \sup(1, \alpha)$ on peut écrire pour tout nombre réel x :

$$|x| > \beta \Longrightarrow |x^3| > \alpha;$$

on dit que $|f|$ a pour limite $+\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$.
Plus généralement : soit une fonction f définie sur $]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ ($a \leqslant b$).

On dit que $|f|$ a pour limite $+\infty$ (ou que $|f|$ tend vers $+\infty$) quand $|x|$ tend vers $+\infty$, si et seulement si, quel que soit le nombre réel $\alpha > 0$, il est possible de trouver un nombre réel $\beta > 0$ tel que pour tout nombre réel x on ait :

$$|x| > \beta \Longrightarrow |f(x)| > \alpha.$$

De façon plus condensée :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall x \in]-\infty, -\beta[\cup]\beta, +\infty[) \quad |f(x)| > \alpha.$$

On écrit $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |f| = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.

On obtiendra quatre nouvelles définitions suivant les signes de x et de $f(x)$. Ainsi dans l'exemple précédent :

$$x > \beta \Longrightarrow x^3 > \alpha,$$

on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f = +\infty$.

De même
$$x < -\beta \Longrightarrow x^3 < -\alpha.$$

On écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f = -\infty$.

EXERCICES

En appliquant les définitions précédentes :

6. Étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - x + 1)$.

7. Étudier la limite de f : $x \longmapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

1. 10 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES (EXTENSIONS)

Les théorèmes relatifs aux opérations sur les limites en x_0 (cf. § 1.8 c) s'appliquent en particulier lorsqu'il s'agit de limites à droite en x_0 ou de limites à gauche en x_0.
On démontre qu'ils s'appliquent encore dans le cas de fonctions ayant des limites quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
Les autres théorèmes sont donnés dans les tableaux suivants :

Au point x_0 (ou à droite en x_0 ou àgauche en x_0) ou lorsque x tend vers $+\infty$ ou x tend vers $-\infty$,

I

	si f a pour limite :	et si g a pour limite :	alors $f + g$ a pour limite :
1	l	$+\infty$	$+\infty$
2	l	$-\infty$	$-\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
5	$+\infty$	$-\infty$	on ne peut conclure

II

	si $\lvert f \rvert$ a pour limite :	et si $\lvert g \rvert$ a pour limite :	alors $\lvert fg \rvert$ a pour limite :
1	$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
2	0	$+\infty$	on ne peut conclure
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

III

	si $\lvert g \rvert$ a pour limite :	alors $\frac{1}{\lvert g \rvert}$ a pour limite :
1	0 (voir remarque 1)	$+\infty$
2	$+\infty$	0

Des tableaux II et III on peut déduire les lignes 1, 3, 4 du tableau IV en remarquant que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

IV

	si $\lvert f \rvert$ a pour limite :	et si $\lvert g \rvert$ a pour limite :	alors $\left\lvert \frac{f}{g} \right\rvert$ a pour limite :
1	$l \neq 0$	0 (voir remarque 1)	$+\infty$
2	0	0	on ne peut conclure
3	l	$+\infty$	0
4	$+\infty$	l (voir remarque 1)	$+\infty$
5	$+\infty$	$+\infty$	on ne peut conclure

REMARQUES

1. Dans le tableau III ligne 1 et dans le tableau IV ligne 1 et ligne 4 quand $l = 0$, la limite de g est 0, mais on suppose $g(x) \neq 0$ sur un intervalle I contenant x_0 sauf peut-être en x_0 ou sur une demi-droite $]a, +\infty[$ quand x tend vers $+\infty$ ou sur une demi-droite $]-\infty, a[$ quand x tend vers $-\infty$, afin que $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ soient définies sur I sauf-peut être en x_0 ou sur $]a, +\infty[$ ou sur $]-\infty, a[$.
   Par exemple, soit $g : x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, on a pour tout $x \neq 0$
   $$0 \leqslant \left\lvert \frac{\sin x}{x} \right\rvert \leqslant \frac{1}{\lvert x \rvert}$$
   et, puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ mais
   $$\frac{1}{\lvert g \rvert} : x \longmapsto \frac{1}{\lvert g(x) \rvert} = \left\lvert \frac{x}{\sin x} \right\rvert$$
   n'est pas définie pour $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et pour tout $\alpha > 0$ on ne pourra jamais trouver $\beta > 0$ tel que pour tout x réel :
   $$\lvert x \rvert > \beta \Longrightarrow \frac{1}{\lvert g(x) \rvert} > \alpha$$
   $\left(\text{car } \frac{1}{g} \text{ ne sera pas définie pour } x = k\pi,\ k \text{ étant un entier relatif tel que } \lvert k \rvert > \frac{\beta}{\pi}\right)$.
   Donc on ne peut pas dire que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\lvert g \rvert} = +\infty$, bien que $\lim_{x \to +\infty} \lvert g \rvert = 0$. Nous sommes précisément dans le cas où il n'existe pas de demi-droite $]a, +\infty[$ sur laquelle $g(x) \neq 0$.
2. Les théorèmes indiqués par les tableaux I, II, IV s'appliquent naturellement encore quand l'une des fonctions est une fonction constante non nulle, la limite de cette fonction étant la valeur de cette constante.
3. Dans les tableaux II et III et IV nous avons mis, pour simplifier, des valeurs absolues. Il restera à préciser, s'il y a lieu, le signe de la limite de fg, $\frac{1}{g}$ et de $\frac{f}{g}$ sur les exemples rencontrés.
4. Dans certains cas nous avons mis « on ne peut conclure ».
   On étudiera les limites correspondant à ces cas sur les exemples rencontrés.

Applications.

Comme pour l'étude de la continuité (cf. § 1-3), pour étudier une limite, au lieu d'utiliser les définitions, il est souvent plus simple d'utiliser les théorèmes précédents.

1. Soit la fonction polynôme $f : x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0)$. Étudions $\lim_{\lvert x \rvert \to +\infty} f$.
   Pour tout $x \neq 0$ on a
   $$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$
   en appliquant les théorèmes précédents :
   $$\lim_{\lvert x \rvert \to +\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n x}\right) = \ldots = \lim_{\lvert x \rvert \to +\infty} \left(\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}\right) = \lim_{\lvert x \rvert \to +\infty} \left(\frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 0$$
   et
   $$\lim_{\lvert x \rvert \to +\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1,$$
   par suite quand $\lvert x \rvert$ tend vers $+\infty$, $f(x)$ a même limite que $a_n x^n$. On peut énoncer :

   Quand $\lvert x \rvert$ tend vers $+\infty$, toute fonction polynôme de la variable réelle x a même limite que son terme de plus haut degré.

   Ainsi : $\lim_{x \to +\infty} (2x^5 + x^3 - 1) = \lim_{x \to +\infty} (2x^5) = +\infty$.
   $\lim_{x \to -\infty} (2x^5 + x^3 - 1) = \lim_{x \to -\infty} (2x^5) = -\infty$.

2. Soit une fonction rationnelle de la variable réelle x, c'est-à-dire le quotient de deux fonctions polynômes de la variable réelle x :
   $$f : x \longmapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$
   $(a_n \neq 0, b_p \neq 0)$ définie pour tout nombre réel x n'annulant pas le dénominateur. Étudions $\lim_{\lvert x \rvert \to +\infty} f$. Pour tout $x \neq 0$ on a
   $$f(x) = \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}{b_p x_p \left(1 + \frac{b_{p-1}}{b_p x} + \ldots + \frac{b_1}{b_p x^{p-1}} + \frac{b_0}{b_p x^p}\right)}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{a_n x^n}{b_p x^p} g(x),$$

$g(x)$ tendant vers 1 quand $|x|$ tend vers $+\infty$. Par suite quand $|x|$ tend vers $+\infty$ $f(x)$ a même limite que $\frac{a_n x^n}{b_p x^p}$. On peut énoncer :

Quand $|x|$ tend vers $+\infty$, une fonction rationnelle de la variable réelle x a même limite que le quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Ainsi $$\lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{2x^5 + x^3 - 1}{x^2 + 2x + 3}\right) = \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{2x^5}{x^2}\right) = \lim_{|x|\to+\infty} (2x^3)$$

cette limite est $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

$$\lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{2x^2 + 1}\right) = \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{x^2}{2x^2}\right) = \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{3x + 1}{x^4 - 2x + 1}\right) = \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{3x}{x^4}\right) = \lim_{|x|\to+\infty} \left(\frac{3}{x^3}\right) = 0.$$

EXERCICES

Étudier les limites, dans les cas indiqués, des fonctions qui associent au nombre x le nombre suivant quand il existe :

1. $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$, quand x tend vers 2, vers -5, vers $+\infty$, vers $-\infty$.
2. $\frac{x^2 - 4}{(x-2)^2(x+5)}$, quand x tend vers 2, vers -5, vers $+\infty$, vers $-\infty$.
3. $\frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9}$, quand x tend vers $\frac{3}{2}$, vers $-\frac{3}{2}$, vers $+\infty$, vers $-\infty$.
4. $(x-2)\left(1 + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right)$, quand x tend vers 2, vers $+\infty$, vers $-\infty$.
5. $\frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ quand x tend vers 1, vers $+\infty$, vers $-\infty$.
6. $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{ax}{(x^2-1)^2}$, quand x tend vers 1 (discuter suivant la valeur de a).
7. $\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{a}{x^3 - 1}$, quand x tend vers 1 (discuter suivant la valeur de a).

1. 11 FONCTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION CONTINUE STRICTEMENT MONOTONE (EXTENSIONS)

Il existe diverses extensions du théorème donné au § 1.6 b et faisant intervenir les extensions de la notion de limite. Nous ne donnerons que les extensions qui seront utilisées dans la suite de ce cours et que nous admettrons :

1. Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a, +\infty[$ et si $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$, alors f est une bijection de $[a, +\infty[$ sur $[f(a), +\infty[$ et sa fonction réciproque est une bijection continue et strictement croissante de $[f(a), +\infty[$ sur $[a, +\infty[$.

2. Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, si $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$ et si $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$, alors f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $]a, +\infty[$, si $\lim_{x\to a+0} f = -\infty$ et si $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$, alors f est une bijection de $]a, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$ et sa fonction réciproque est une bijection continue et strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]a, +\infty[$.
4. Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $]a, +\infty[$, si $\lim_{x\to a+0} f = +\infty$ et si $\lim_{x\to+\infty} f = -\infty$, alors f est une bijection de $]a, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$ et sa fonction réciproque est une bijection continue et strictement décroissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]a, +\infty[$.

1. 12 FONCTION : $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$

Étudions la fonction numérique de la variable réelle $f: x \longmapsto x^n$, n étant un entier relatif donné.

a) Étude du cas où n est un entier strictement positif.

Domaine de définition et continuité. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction identique : $x \longmapsto x$ est continue pour tout x réel et la fonction f, qui est le produit de n fonctions égales à la fonction identique, est aussi continue pour tout x réel (cf. § 1-3, applications).

Sens de variation. Si n est pair, nous avons :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = f(x)$$

la fonction est paire.

Si n est impair, nous avons :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(-x) = -f(x)$$

la fonction est impaire. Nous étudierons donc le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$

Si $n > 1$, quels que soient $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$, on peut écrire :

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1})$$

et si $n > 1$, quels que soient $x_1 \geqslant 0$ et $x_2 \geqslant 0$ distincts, le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 est :

$$\frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} = x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Si $n = 1$, la fonction : $x \longmapsto x$ est aussi strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Étude des limites : $$\lim_{x\to+\infty} x^n = \lim_{x\to+\infty} (x \,.\, x \,.\, \ldots \,.\, x) = (\lim_{x\to+\infty} x)(\lim_{x\to+\infty} x)\ldots(\lim_{x\to+\infty} x) = +\infty$$

Tableau de variation. Nous avons donc :

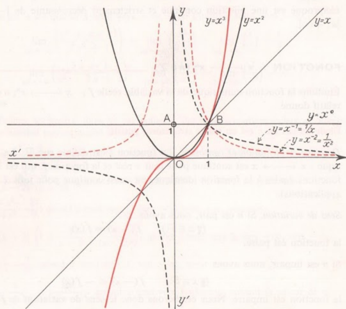
x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique. Si n est pair, la fonction est paire donc la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $(x'x, y'y)$ admet $y'y$ pour axe de symétrie. Si n est impair, la fonction est impaire donc la représentation graphique de f admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

Nous avons indiqué (fig. 11) les représentations graphiques des fonctions :

$$x \longmapsto y = x$$
$$x \longmapsto y = x^2$$
$$x \longmapsto y = x^3$$

Fig. 11



b) Étude du cas où n est un entier strictement négatif.

Domaine de définition et continuité. Rappelons que si $x \neq 0$ et si n est un entier strictement négatif, on peut écrire : $x^n = \frac{1}{x^{-n}} = \frac{1}{x^{n'}}$ en posant $n' = -n$.

L'étude de $f : x \longmapsto x^n$ se déduit donc de l'étude de $g : x \longmapsto x^{n'}$ qui est une fonction correspondant au cas *a)* puisque $n' = -n$ est un entier strictement positif.

La fonction g est définie et continue pour tout x donc son inverse $f = \frac{1}{g}$ est définie et continue pour tout $x \neq 0$.

Sens de variation. Comme dans le cas *a)*, la fonction f est paire ou impaire suivant que n est pair ou impair. Nous étudierons donc le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.

D'une façon générale, si f est une fonction non nulle, définie, de signe *constant* sur un intervalle I et si g est son inverse sur I, soit x_1 et x_2 deux nombres quelconques distincts appartenant à I

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{g(x_2)} - \frac{1}{g(x_1)}}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{g(x_2)\,g(x_1)} \cdot \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$$

comme $g(x_2)\,g(x_1) > 0$, les taux d'accroissement des deux fonctions f et g sont de signes contraires. Par suite : *deux fonctions f et $\frac{1}{f}$ varient en sens contraires sur tout intervalle où elles sont définies et où elles ont un signe constant.*

Appliquons ce théorème à la fonction f étudiée. Puisque g est positive sans s'annuler et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, son inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Étude des limites. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{n'}} = 0$

$$\lim_{x \to +0} x^n = \lim_{x \to +0} \frac{1}{x^{n'}} = +\infty.$$

Tableau de variation. Nous avons donc

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

Représentation graphique. Nous avons indiqué (fig. 11) les représentations graphiques des fonctions :

$$x \longmapsto y = x^{-1} = \frac{1}{x}$$
$$x \longmapsto y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

notons que les axes de coordonnées sont des asymptotes pour chacune de ces courbes.

c) Étude du cas où $n = 0$.

On sait que, si $x \neq 0$, $x^0 = 1$ donc la fonction $f : x \longmapsto x^0 = 1$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ et sa représentation graphique (fig. 11) est une droite parallèle à $x'x$, à l'exclusion du point A (0, 1).

Remarque. Toutes les courbes obtenues, pour les différentes valeurs de n prises dans $\mathbb{Z}$, passent par le point fixe B (1, 1).

Le nombre a^n ($n \in \mathbb{Z}$), quand il existe, s'appelle la **puissance entière de a d'exposant n.** Nous allons donner une extension du symbole a^n au cas où l'exposant est un nombre rationnel (cf. § 1.14).

1.13 FONCTION : $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$; $x \in \mathbb{R}_+$)

a) Étude de la fonction.

Revenons au cas (cf. § 1.12 *a)*) où *n est un entier strictement positif et supposons $x \geqslant 0$*, on a vu que la fonction $f : x \longmapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty$.

Donc (cf. § 1.11) la fonction f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[f(0), +\infty[= [0, +\infty[$ et sa fonction réciproque f^{-1} est une bijection continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ c'est-à-dire encore de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
L'image unique du nombre réel $x \geqslant 0$ par f^{-1} s'appelle la **racine $n^{\text{ième}}$ positive ou nulle du nombre positif ou nul x.** Cette image se note $\sqrt[n]{x}$ et on a $f^{-1} : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Le symbole $\sqrt[n]{\ }$ s'appelle un *radical*, l'entier strictement positif n s'appelle *l'indice* du radical. Si l'indice du radical est $n = 2$, on convient de ne pas l'écrire (pour tout $x \geqslant 0$ on écrit $\sqrt{x}$ au lieu de $\sqrt[2]{x}$) et on dit « racine carrée » au lieu de « racine deuxième ». Pour $n = 3$, on dit « racine cubique » au lieu de « racine troisième ».
Puisque $f : x \longmapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, l'équation $x^n = a$ (a donné dans $\mathbb{R}_+$, x cherché dans $\mathbb{R}_+$) admet une solution unique qui est $x = \sqrt[n]{a}$. Nous avons donc $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
On peut aussi écrire :

$$[\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2] \quad y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n$$

Dans un *même repère orthonormé*, la représentation graphique (fig. 12) de

$$f^{-1} : \ x \longmapsto y = \sqrt[n]{x}$$

se déduira de la représentation graphique de $f : \ x \longmapsto y = x^n$ par symétrie par rapport à la première bissectrice du repère (cf. § 1.7 *d*). Notons que pour $n = 1$ on a

$$y = x = \sqrt[1]{x}.$$

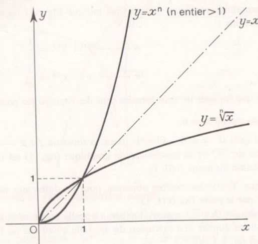


Fig. 12

REMARQUES

1. Si n est un entier strictement positif impair, la fonction $f : x \longmapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} f = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$ donc (cf. § 1.11) f est bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et elle admet une fonction réciproque f^{-1} qui est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Dans un même repère orthonormé, la représentation graphique Γ_1 de $f^{-1} : x \longmapsto y = f^{-1}(x)$ se déduit de celle Γ de $f : x \longmapsto y = x^n$ par symétrie par rapport à la première bissectrice du repère (fig. 13).

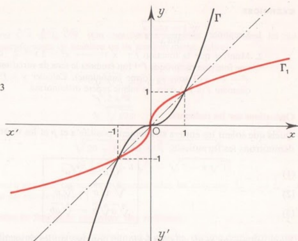


Fig. 13

Mais si n est un entier strictement positif pair, la fonction $f : \ x \longmapsto x^n$ n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$, elle l'est seulement sur $\mathbb{R}_+$ (ou seulement sur $\mathbb{R}_-$). Dans tous les cas (n pair ou impair) la fonction $f : \ x \longmapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et l'équation

(1) $$x^n = a$$

(a donné dans $\mathbb{R}_+$, x cherché dans $\mathbb{R}_+$)
admet une solution unique que nous avons notée $\sqrt[n]{a}$.

Le symbole $\sqrt[n]{a}$ n'a de sens et représente un nombre positif ou nul seulement dans le cas où $n \in \mathbb{N}^*$ et où $a \in \mathbb{R}_+$.

Ainsi quel que soit le nombre réel a, le symbole $\sqrt{a^2}$ a un sens puisque $a^2 \geqslant 0$ et on peut écrire $\sqrt{a^2} = |a|$.
Autrement dit :

si $a \geqslant 0 \quad \sqrt{a^2} = a$
si $a \leqslant 0 \quad \sqrt{a^2} = -a$.

2. On appelle **racine $n^{\text{ième}}$ réelle du nombre réel a** toute solution, quand elle existe, de l'équation :

(1) $$x^n = a$$

(n entier donné strictement positif, a nombre réel donné, x nombre réel cherché).
Cherchons ces solutions.
Si x existe, $|x|^n = |a|$ donc $|x| = \sqrt[n]{|a|}$.
Si n est pair, si $a \geqslant 0$ nécessairement $x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$.
On vérifie que ces deux nombres sont bien solutions de (1); si $a < 0$ comme $x^n \geqslant 0$ on ne peut avoir $x^n = a$ et (1) n'a pas de solutions.
Si n est impair, x et a sont nécessairement de même signe. Si $a \geqslant 0$ nécessairement $x = \sqrt[n]{a}$. On vérifie que ce nombre est bien solution de (1). Si $a < 0$ nécessairement $x = -\sqrt[n]{|a|} = -\sqrt[n]{-a}$.
On vérifie que ce nombre est bien solution de (1).
En résumé :

n pair	$a \geqslant 0$	2 solutions : $\sqrt[n]{a}$ et $-\sqrt[n]{a}$ (confondues si $a = 0$)
	$a < 0$	0 solution
n impair	$a \geqslant 0$	1 solution : $\sqrt[n]{a}$
	$a < 0$	1 solution : $-\sqrt[n]{-a}$.

1. Simplifier $\dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x}$.
2. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x + 2$ définie sur $[1\,,+\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1} (on étudiera le sens de variation de f, en mettant le trinôme $x^2 - 2x + 2$ sous sa forme canonique). Calculer $y = f^{-1}(x)$. Représenter graphiquement f et f^{-1} dans un même repère orthonormé.

b) Opérations sur les radicaux.

Quels que soient les entiers strictement positifs n et p et les nombres réels $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$ démontrons les formules :

(1) $$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$$

(2) $$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

(3) $$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Nous utiliserons, pour cela, les formules connues sur les puissances *entières*. Pour démontrer (1) ou (2), remarquons que l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$: $x \longmapsto x^{np}$ est bijective, il suffit donc de montrer que les puissances d'exposant np des deux membres de (1) ou de (2) sont égales :

$$(\sqrt[n]{a})^{np} = [(\sqrt[n]{a})^n]^p = a^p$$

$$(\sqrt[np]{a^p})^{np} = a^p \quad \text{donc (1) est vérifiée.}$$

$$(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}})^{np} = [(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}})^n]^p = (\sqrt[p]{a})^p = a$$

$$(\sqrt[np]{a})^{np} = a \quad \text{donc (2) est vérifiée.}$$

De même, l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$: $x \longmapsto x^n$ étant bijective, (3) sera vérifiée si les puissances d'exposant n des deux membres de (3) sont égales :

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n\,(\sqrt[n]{b})^n = ab$$

$$(\sqrt[n]{ab})^n = ab \quad \text{donc (3) est vérifiée.}$$

Plus généralement si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des nombres positifs ou nuls, on démontre de même que :

$$\sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2}\ldots\sqrt[n]{a_p} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_p},$$

en particulier, si $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = a$, on a

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\ldots\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{aa\ldots a}$$

donc quels que soient les entiers strictement positifs n et p et le nombre réel $a \geqslant 0$,

(4) $$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

Nous avons aussi, quels que soient les entiers strictement positifs n et p et les nombres réels $a \geqslant 0$ et $b > 0$:

(5) $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

(calculer les puissances d'exposant n des deux membres).

3. Comparer $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[6]{9}$ (On cherchera à simplifier, s'il y a lieu, les radicaux et on les transformera de manière qu'ils aient le même indice).
4. Simplifier :

$$\sqrt{\sqrt{3}} + 2\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{243}$$

$$\frac{\sqrt[5]{2}\sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$$

5. Simplifier :

$$\frac{\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}\right)}$$

(On remarquera que les nombres figurant sous les radicaux $\sqrt[3]{\ }$ ou $\sqrt[4]{\ }$ sont des cubes ou des carrés simples.)

c) Continuité et limites de fonctions contenant des radicaux.

Soit I un intervalle ouvert ou fermé, à droite ou à gauche, ou une demi-droite ouverte ou fermée ou encore $]-\infty\,,+\infty[$. Supposons que f soit une fonction définie sur I et telle que **$f(x) \geqslant 0$ sur I.**

La fonction $\sqrt[n]{f}$ définie sur I est la fonction qui associe à tout x de I le nombre $\sqrt[n]{f(x)}$.

On a $\quad f : x \longmapsto f(x)$ définie sur I (avec $f(x) \geqslant 0$ sur I)

$\quad g : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$

$\quad g \circ f : x \longmapsto \sqrt[n]{f(x)}$ définie sur I

donc $\sqrt[n]{f} = g \circ f$; on sait que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ on peut donc, en utilisant les théorèmes du § 1-2 et du § 1-8 *d*, énoncer :

1. Si f est continue en x_0 de I, la composée $g \circ f = \sqrt[n]{f}$ est continue en x_0.

2. Si f a une limite $l \geqslant 0$ en x_0 de I, la composée $g \circ f = \sqrt[n]{f}$ a pour limite $g(l) = \sqrt[n]{l}$ en x_0.

On étendra ces résultats aux cas où il y a continuité ou limite de f à droite ou à gauche en x_0 ou quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

On démontre également que :

3. Si f a pour limite $+\infty$ (dans les conditions précédentes), $\sqrt[n]{f}$ a pour limite $+\infty$ (dans les mêmes conditions).

Exemples.

1. Soit les fonctions numériques de la variable réelle

$$f : \; x \longmapsto (x-1)(x-2)$$

$$\sqrt{f} : \; x \longmapsto \sqrt{(x-1)(x-2)}$$

f est définie sur $\mathbb{R}$ mais $\sqrt{f}$ n'est définie que si $(x-1)(x-2) \geqslant 0$ c'est-à-dire sur $]-\infty\,,1] \cup [2\,,+\infty[$. La fonction f est continue pour tout x réel et en particulier elle est continue sur les demi-droites $]-\infty\,,1]$ et $[2\,,+\infty[$ donc $\sqrt{f}$ est continue sur $]-\infty\,,1]$ et sur $[2\,,+\infty[$.

2. Soit $f : \; x \longmapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2x$. Étudions $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f$. Le discriminant de $x^2 + 2x + 2$ est négatif donc ce trinôme est toujours du signe du coefficient de x^2 qui est 1. Donc $x^2 + 2x + 2 > 0$ pour tout x réel et f est définie pour tout x réel.

a) $\lim_{x\to+\infty} (x^2 + 2x + 2) = \lim_{x\to+\infty} (x^2) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+2} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) On a de même $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+2} = +\infty$ mais $\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$.

On ne peut donc conclure pour la somme $f(x)$. Opérons comme pour l'étude des limites de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles (cf. § 1.10)

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + 2x = |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2x$$

$$f(x) = -x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2x \quad \text{car} \quad x < 0$$

$$f(x) = x\left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

donc la limite du produit est $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

3. Soit $f: \; x \longmapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x$. Étudions $\lim_{x\to+\infty} f$.

Comme dans l'exemple 2, f est défini pour tout x.

a) En raisonnant comme dans le cas *a*) précédent, on trouve $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) On ne peut procéder comme dans le cas *a*) pour avoir $\lim_{x\to-\infty} f$ car $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+2} = +\infty$ mais $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et on ne peut conclure pour la limite de la somme $f(x)$.

On ne peut procéder, non plus, comme dans le cas *b*) précédent car on arrive à

$$f(x) = x\left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

et on ne peut conclure pour la limite du produit $f(x)$. Il nous faut donc chercher une autre méthode. Pour $x < 0$ on peut écrire :

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+2x+2} + x)(\sqrt{x^2+2x+2} - x)}{\sqrt{x^2+2x+2} - x} = \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2} - x}$$

$$f(x) = \frac{x\left(2 + \frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - x} = \frac{2 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2 + \frac{2}{x}\right) = 2 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1\right) = -2$$

et $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{-2} = -1.$$

EXERCICES

Étudier les limites suivantes :

6. $\lim_{|x|\to+\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 3} + mx)$ (discuter suivant les valeurs réelles du paramètre m).

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 - x}$

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$ (pour le numérateur on utilisera l'identité remarquable $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$).

1. 14 PUISSANCES RATIONNELLES D'UN NOMBRE RÉEL STRICTEMENT POSITIF

Certains résultats qui suivent, s'étendent aux puissances rationnelles d'un nombre réel a nul : le lecteur s'en assurera. Nous supposerons, pour simplifier, $a > 0$.

a) **Définition de a^r ($r \in \mathbb{Q}$; $a > 0$).**

Si r est un rationnel strictement positif dont deux représentants sont $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, p, q, p', q' appartenant à $\mathbb{N}^*$, on a $pq' = p'q$. Soit $a > 0$ donné, comparons

$$\alpha = \sqrt[q]{a^p} \quad \text{et} \quad \alpha' = \sqrt[q']{a^{p'}}$$

$$\alpha^{qq'} = (\sqrt[q]{a^p})^{qq'} = [(\sqrt[q]{a^p})^q]^{q'} = (a^p)^{q'} = a^{pq'}$$

$$\alpha'^{qq'} = (\sqrt[q']{a^{p'}})^{qq'} = [(\sqrt[q']{a^{p'}})^{q'}]^q = (a^{p'})^q = a^{p'q}$$

comme $pq' = p'q$, nous avons $\alpha^{qq'} = \alpha'^{qq'}$ et comme l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$: $x \longmapsto x^{qq'}$ est bijective, nous avons $\alpha = \alpha'$ c'est-à-dire $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}$. Concluons : Si $a > 0$ et si $\frac{p}{q}$ est un représentant d'un rationnel $r > 0$, p et q appartenant à $\mathbb{N}^*$, le nombre $\sqrt[q]{a^p}$ *est indépendant du représentant* $\frac{p}{q}$ *de r*.

Nous écrirons le nombre $\sqrt[q]{a^p}$ sous la forme $a^{\frac{p}{q}}$ ou a^r. L'écriture a^r montre bien que ce nombre est indépendant du représentant de r, mais elle se justifie aussi par le fait que, lorsque $r = n$ ($n \in \mathbb{N}$), un représentant de n est $\frac{n}{1}$ et on a $\sqrt[1]{a^n} = a^n$ (cf. § 1.13 a). Une autre justification sera donnée au sous-paragraphe *b*) qui suit.

Si r est un rationnel strictement négatif. Soit $a > 0$ donné, comme pour les exposants entiers négatifs nous poserons $a^r = \dfrac{1}{a^{-r}}$.

Si $r = 0$. Par définition, si $a \neq 0$, $a^0 = 1$ (cf. § 1.12 c).

Donc le symbole a^r, où a est un nombre réel strictement positif, est défini pour tous nombre rationnel r. Ce nombre a^r s'appelle la **puissance rationnelle de a d'exposant r.**

b) Formules.

Nous allons donner une extension des formules connues relatives aux puissances entières. On démontre que, quels que soient les exposants rationnels r et r' et les nombres réels $a > 0$ et $b > 0$, on a

(1)	$a^r a^{r'} = a^{r+r'}$	(4)	$(ab)^r = a^r b^r$
(2)	$(a^r)^{r'} = a^{rr'}$		
(3)	$\dfrac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$	(5)	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

Démontrons la formule (1).

Si $r > 0$ *et* $r' > 0$. Soit $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ deux représentants de r et r', p, q, p', q' appartenant à $\mathbb{N}^*$:

$$a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{p'}{q'}} = \sqrt[q]{a^p}\,\sqrt[q']{a^{p'}} = \sqrt[qq']{a^{pq'}}\,\sqrt[qq']{a^{p'q}}$$
$$= \sqrt[qq']{a^{pq'+p'q}}$$
$$= a^{\frac{pq'+p'q}{qq'}}$$
$$= a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}}$$

donc $\qquad a^r a^{r'} = a^{r+r'}.$

Si $r < 0$ *et* $r' < 0$.

$$a^r a^{r'} = \frac{1}{a^{-r}}\,\frac{1}{a^{-r'}} = \frac{1}{a^{-r}a^{-r'}}$$

On a $\ -r > 0$ et $-r' > 0$, donc on est ramené au cas précédent

$$a^r a^{r'} = \frac{1}{a^{-r-r'}} = \frac{1}{a^{-(r+r')}} = a^{r+r'}.$$

Si r *et* r' *sont de signes contraires.* Supposons, par exemple, $r > 0$ et $r' < 0$ (le cas $r < 0$ et $r' > 0$ est analogue). Soit $\frac{p}{q}$ un représentant de r et $-\frac{p'}{q'}$ un représentant de r', p, q, p', q' appartenant à $\mathbb{N}^*$.

$$a^{\frac{p}{q}} a^{-\frac{p'}{q'}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{p'}{q'}}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q']{a^{p'}}} = \frac{\sqrt[qq']{a^{pq'}}}{\sqrt[qq']{a^{p'q}}} = \sqrt[qq']{\frac{a^{pq'}}{a^{p'q}}}.$$

Nous avons 3 cas :

$$\text{si } pq' > p'q,\quad \sqrt[qq']{\frac{a^{pq'}}{a^{p'q}}} = \sqrt[qq']{a^{pq'-p'q}} = a^{\frac{pq'-p'q}{qq'}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}}$$

$$\text{si } pq' < p'q,\quad \sqrt[qq']{\frac{a^{pq'}}{a^{p'q}}} = \sqrt[qq']{\frac{1}{a^{p'q-pq'}}} = \frac{1}{\sqrt[qq']{a^{p'q-pq'}}} = \frac{1}{a^{\frac{p'q-pq'}{qq'}}}$$
$$= a^{\frac{pq'-p'q}{qq'}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}}$$

$$\text{si } pq' = p'q,\quad \sqrt[qq']{\frac{a^{pq'}}{a^{p'q}}} = 1 = a^0 = a^{\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}}$$

donc dans les trois cas $\ a^{\frac{p}{q}} a^{-\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}}$ c'est-à-dire $\ a^r\, a^{r'} = a^{r+r'}$.

Si $r = 0$ *ou* $r' = 0$ on a $\ a^r = 1\ $ ou $\ a^{r'} = 1\ $ et encore $\ a^r a^{r'} = a^{r+r'}$

A titre d'exercices, vous démontrerez les autres formules. On remarquera que (3) se déduit de (1) car $\frac{1}{a^{r'}} = a^{-r'}$ et que (5) se déduit de (4) en écrivant

$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(a \times \frac{1}{b}\right)^r = a^r \left(\frac{1}{b}\right)^r$ et en démontrant que $\left(\frac{1}{b}\right)^r = \frac{1}{b^r}$.

EXERCICES

1. Simplifier en utilisant des exposants rationnels :

$$\frac{\sqrt{2}\ \sqrt[3]{16}\ \sqrt[5]{8}}{\sqrt[30]{2^{13}}}$$

2. Soit $\ a > 0\ $ et $\ b > 0$. Simplifier :

$$\frac{\left(a^2 + a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^2 + a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\dfrac{a^3 + 3\,a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{1}{5}} - 3\,b^{\frac{27}{10}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{5}}}}$$

pour quelles valeurs de a et b, cette dernière expression n'est-elle pas définie?

EXERCICES

Définition de la continuité et de la limite en un point : ex. 1-2-28-29.
Opérations sur les fonctions continues : ex. 3-4-5-6-29.
Opérations sur les limites (extensions) : ex. 7 à 17.
Radicaux : ex. 18 à 27-30.

1.1 Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

si x est rationnel $\quad x \longmapsto x$
si x n'est pas rationnel $\quad x \longmapsto 0.$

1.2 Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

si x est rationnel $\quad x \longmapsto x$
si x n'est pas rationnel $\quad x \longmapsto 1 - x.$

1.3 On désigne par $\mathcal{C}$ (D, $\mathbb{R}$) l'ensemble des fonctions continues sur D $= [0, 2]$. On sait que cet ensemble, muni de l'addition et de la multiplication des fonctions numériques, a une structure d'anneau commutatif unitaire.

a) Étudier la continuité et faire la représentation graphique de la fonction f définie par :

si $x \in [0, 1]\quad f(x) = 0$
si $x \in]1, 2]\quad f(x) = x - 1.$

b) Étudier la continuité et faire la représentation graphique de la fonction g définie par :

si $x \in [0, 1]\quad g(x) = 1 - x$
si $x \in]1, 2]\quad g(x) = 0$

c) Quel est le produit fg? Qu'en concluez-vous?

1.4 E (x) désignant la partie entière de x, soit la fonction $f : x \longmapsto (-1)^{E(x)}\,[x - E(x)]$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f(x+2) = f(x)$.

Que peut-on dire des points M $(x, f(x))$ et M' $(x+2, f(x+2))$?

b) Étudier la continuité et faire la représentation graphique de f.

1.5 E (x) désignant la partie entière de x, soit la fonction $f : x \longmapsto E(x) + [x - E(x)]^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f(x+1) = f(x) + 1$.

Que peut-on dire des points M $(x, f(x))$ et M' $(x+1, f(x+1))$?

b) Étudier la continuité et faire la représentation graphique de f.

1.6 Soit la fonction $f : x \longmapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$, E (x) étant la partie entière de x.

a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f(x+1) = f(x) + 1$.

Que peut-on dire des points M $(x, f(x))$ et M' $(x+1, f(x+1))$?

b) Étudier la continuité et faire la représentation graphique de f.

1.7 Soit la fonction f de la variable réelle x : $x \longmapsto 2x^2 - x + 1 + \dfrac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{R})$.

a) Étudier la limite de f quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

b) Étudier la limite de f quand x tend vers 0 (discuter suivant a).

1.8 Mêmes questions avec $f : x \longmapsto \dfrac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x}$ (discuter suivant a, b, c, d s'il y a lieu).

1.9 Soit la fonction f de la variable réelle x : $x \longmapsto \dfrac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1}$.

a) Étudier la limite de f quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

b) Étudier la limite de f au point 1 (discuter suivant a et b).

c) Peut-on trouver un prolongement de f par continuité au point 1?

1.10 Soit la fonction f de la variable réelle x : $x \longmapsto \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5}$.

a) Étudier la limite de f quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

b) Étudier la limite de f au point 1, au point 5.

c) Peut-on trouver un prolongement de f par continuité au point 1? au point 5?

Étudier les limites suivantes (ex. 11 à 17).

1.11 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}$.

1.12 $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotg} x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

1.13 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{tg} x + \sin x}{x}$.

1.14 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

1.15 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$.

1.16 $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$.

1.17 $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}}$.

1.18 Soit la fonction de la variable réelle

$$f : x \longmapsto \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}.$$

Pour quelles valeurs de x est-elle définie?

Simplifier $f(x)$.

1.19 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[6]{1-x^2}.$$

Examiner si les fonctions f suivantes ont une limite et calculer cette limite quand elle existe (ex. 20 à 27).

1.20 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ quand x tend vers 1? quand x tend vers $+\infty$?

1.21 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$?

1.22 $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$ quand x tend vers 0? quand x tend vers $+\infty$?

1.23 $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}\sqrt[12]{x}$ quand x tend vers $+\infty$?

1.24 $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 1} + ax + b$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$?
(discuter suivant les valeurs des paramètres réels a et b).

1.25 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + mx$ quand x tend vers $+\infty$?
(discuter suivant les valeurs du paramètre réel m).

1.26 $f(x) = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c} + mx\sqrt{x+2}$ quand x tend vers $+\infty$?
(discuter suivant les valeurs des paramètres réels a, b, c, m).

1.27 $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1} - 1}{\sqrt{x^2+1} - 1}$ quand x tend vers 0? quand x tend vers $+\infty$?

Sujets d'étude.

1.28 *a)* En écrivant $a = (a - b) + b$, démontrer que :

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|$$

En écrivant de même $b = (b - a) + a$, démontrer que :

$$|b| - |a| \leqslant |a - b|$$

En déduire que, quels que soient les nombres réels a et b,

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$$

b) Démontrer que si f est une fonction continue au point x_0, $|f|$ est continue au point x_0.

c) Démontrer que si f a une limite l au point x_0, $|f|$ admet pour limite $|l|$ au point x_0.

1.29 On appelle *distance* définie sur un ensemble E toute application d de E × E dans $\mathbb{R}_+$ telle que, quels que soient x, y, z de E :

$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$
$$d(x, y) = d(y, x)$$
$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y).$$

Le couple (E, d) s'appelle un *espace métrique*. Le nombre $d(x, y)$ est la distance des éléments x et y de E. On appelle *boule ouverte* de centre x_0 et de rayon h ($h > 0$) l'ensemble des éléments x de E tels que $d(x_0, x) < h$. On dit qu'une application f d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (E', d') est *continue* au point x_0 de E si et seulement si quelle que soit la boule ouverte $\mathcal{B}'$ de centre $f(x_0)$ dans E', il existe une boule ouverte $\mathcal{B}$ de centre x_0 dans E telle que $f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}'$.

1° Écrire la définition de la continuité précédente à l'aide des quantificateurs et d'une implication.

2° Soit f une application de (E, d) dans (E', d') continue en x_0 de E, g une application de (E', d') dans (E'', d'') continue en $f(x_0)$ de E'. Démontrer que la composée $g \circ f$ est une application de (E, d) dans (E'', d'') continue en x_0.

3° Montrer que l'application δ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que, quels que soient x et y de $\mathbb{R}$:

$$\delta(x, y) = |x - y|$$

est une distance définie sur $\mathbb{R}$. Nous supposerons, dans ce qui suit, que $\mathbb{R}$ est muni de cette distance.
Montrer que les applications d_1, d_2, d_3 de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que, quels que soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
$$d_2(x, y) = \sup(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$$
$$d_3(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

sont des distances définies sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que, quels que soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{1}{2} d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant d_3(x, y) \leqslant d_1(x, y).$$

En déduire que l'application identique de $\mathbb{R}^2$, muni de l'une quelconque des distances d_1 ou d_2 ou d_3, dans $\mathbb{R}^2$, muni de l'une quelconque de ces distances, est continue en tout point x de $\mathbb{R}^2$. Nous supposerons, dans ce qui suit, que $\mathbb{R}^2$ est muni de l'une de ces trois distances.

4° Montrer que les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 x_2$$

sont continues en tout point x de $\mathbb{R}^2$.
Si f et g sont deux applications de l'espace métrique (E, d) dans $\mathbb{R}$ continues en x_0 de E, montrer que l'application de (E, d) dans $\mathbb{R}^2$:

$$x \longmapsto (f(x), g(x))$$

est continue en x_0.
En utilisant les schémas suivants, λ étant une constante réelle :

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) & \longmapsto & f(x) + g(x) \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) & \longmapsto & f(x)\, g(x) \\ x & \longmapsto & (\lambda, f(x)) & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

et en utilisant les résultats précédents, montrer que si f et g sont deux applications de l'espace métrique (E, d) dans $\mathbb{R}$ continues en x_0 de E et si λ est une constante réelle, les applications $f + g, fg, \lambda f$ de (E, d) dans $\mathbb{R}$ sont continues en x_0.

5° Montrer que l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto \frac{1}{x} \quad \text{est continue pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^*.$$

Soit g une application de l'espace métrique (E, d) dans $\mathbb{R}$, soit E' l'ensemble des points de E pour lesquels g ne s'annule pas. En utilisant le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} E' & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) & \longmapsto & \dfrac{1}{g(x)} \end{array}$$

et en utilisant les résultats précédents, montrer que si f et g sont deux applications de (E, d) dans $\mathbb{R}$ continues en x_0 de E et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont aussi continues en x_0.

1.30 1° Soit p et q deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer qu'on ne peut avoir $p^3 = 2q^3$. En déduire que le nombre $x_0 = \sqrt[3]{2}$ ne peut être rationnel.

2° Les nombres a, b, c étant *rationnels*, on considère les équations :

(1) $$ax^2 + bx + c = 0$$
(2) $$x^3 - 2 = 0$$

d'inconnue x *réelle*.
En multipliant (1) et (2) par des coefficients convenables et en additionnant membre à membre, montrer que si x_0 est une racine commune aux équations (1) et (2), x_0 est aussi racine de :

(3) $$bx^2 + cx + 2a = 0.$$

Montrer de même, à l'aide de (1) et (3), que cette racine commune serait aussi racine de :

(4) $$(b^2 - ac)\, x + bc - 2a^2 = 0.$$

Si $b^2 - ac \neq 0$, en déduire que les équations (1) et (2) ne peuvent avoir de racine réelle commune.

3° Si $b^2 - ac = 0$ et si $x_0 = \sqrt[3]{2}$ est une racine commune à (1) et (2), montrer que le discriminant de (1) est égal à $-3b^2$ et que, par suite, $b = 0$. En déduire alors que $a = c = 0$.

4° Montrer que, a, b, c étant des nombres rationnels quelconques, on a

$$a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0 \iff a = b = c = 0.$$

5° Soit E l'ensemble des nombres de la forme $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c$ où a, b, c sont des nombres rationnels quelconques. L'addition notée + et la multiplication notée × des nombres de E sont celles des nombres réels, la multiplication externe notée . est celle d'un nombre de E par un nombre rationnel.
Montrer que (E, +, .) est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension 3, une base étant $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, 1)$.

6° Les nombres a, b, c, a', b', c' étant rationnels, trouver des conditions nécessaires et suffisantes vérifiées par ces nombres pour que

$$\frac{a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c}{a'\sqrt[3]{4} + b'\sqrt[3]{2} + c'}$$

soit rationnel.

7° Démontrer que, quels que soient A, B, C réels, on a :

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3\,ABC = \frac{1}{2}(A + B + C)\,[(A - B)^2 + (B - C)^2 + (C - A)^2]$$

en déduire une factorisation du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} c & b & a \\ 2a & c & b \\ 2b & 2a & c \end{vmatrix}$$

et montrer que $\Delta \neq 0$ quels que soient a, b, c rationnels non tous trois nuls.

8° Démontrer que tout élément non nul de E admet un inverse et un seul dans E et que (E, +, ×) est un corps commutatif.

2| Fonction numérique d'une variable réelle : dérivation.

Nous reprenons les résultats de la classe de Première en les complétant. Dans la première section nous définissons une **fonction différentiable** *en x_0 ainsi qu'une* **fonction dérivable** *en x_0. Nous montrons l'équivalence de ces deux définitions et nous en donnons une interprétation géométrique.*
Grâce à cette équivalence, nous ferons appel suivant les cas et pour des raisons de commodité à l'une ou l'autre de ces deux définitions.
On est ainsi conduit dans la section II, pour les fonctions différentiables (ou dérivables) en tout point de]a , b[, à la notion de **fonction dérivée.** *Enfin la section III donne diverses extensions de la notion de dérivée.*

I. Dérivée d'une fonction en un point Interprétation géométrique

2. 1 FONCTION DIFFÉRENTIABLE ET FONCTION DÉRIVABLE EN UN POINT

a) Fonction différentiable en x_0.

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3 + x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Nous nous proposons de calculer une valeur approchée de $f(1{,}017)$ par exemple, sans calculer $(1{,}017)^3$ ni $(1{,}017)^2$. Pour cela posons $x = 1 + h$. Quel que soit le nombre réel h nous avons :

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (1+h)^3 + (1+h)^2 \\ &= (1 + 3h + 3h^2 + h^3) + (1 + 2h + h^2) \\ &= 2 + 5h + 4h^2 + h^3, \end{aligned}$$

pour h « petit », on peut « négliger » $4h^2$ et h^3 d'où $f(1+h) \simeq 2 + 5h$, donc

$$f(1{,}017) \simeq 2 + (5 \times 0{,}017),$$
$$f(1{,}017) \simeq 2{,}085.$$

On peut écrire : $f(1+h) = 2 + 5h + (4h + h^2)\,h$, remarquons que $f(1) = 2$ donc :

$$f(1+h) = f(1) + 5h + \alpha(h).\,h,$$

en posant $\alpha(h) = 4h + h^2$. Remarquons que $\lim\limits_{h \to 0} \alpha = 0$. On dit que f est différentiable au point $x_0 = 1$ et la fonction : $h \longmapsto 5h$ est appelée fonction linéaire tangente à f au point $x_0 = 1$. Plus généralement :

Définition.

On dit qu'une fonction f est **différentiable** au point x_0 s'il existe une application linéaire $h \longmapsto lh$ et une fonction $h \longmapsto \alpha(h)$ définie sur un intervalle I de centre zéro telles que

$$(\forall h \in \mathrm{I}) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)\, h \qquad (1)$$

avec

$$\lim_{h \to 0} \alpha = 0$$

L'application : $h \longmapsto lh$ est alors appelée **fonction linéaire tangente** à la fonction f au point x_0 ou encore **différentielle** de f au point x_0. On la note df_{x_0}. Le nombre l s'appelle le coefficient de la différentielle de f au point x_0.

On a donc pour tout h réel

$$df_{x_0}(h) = lh.$$

Remarquons qu'il résulte de la définition qu'une fonction différentiable en x_0 est définie sur un intervalle ouvert non vide de centre x_0.

Pour $h \neq 0$, la relation (1) s'écrit

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l + \alpha(h) \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \alpha = 0,$$

donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l.$$

Réciproquement si $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a pour limite un nombre l quand h tend vers 0, on peut trouver une fonction α telle que :

$$\alpha(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - l$$

sur un intervalle I de centre zéro, zéro exclu, et telle que $\alpha(0) = k$ (k étant un nombre réel que l'on peut se donner arbitrairement; on peut prendre par exemple, ce que nous ferons souvent, $k = 0$, alors α est **continue** au point zéro).

Nous pouvons alors écrire

$$(\forall h \in \mathrm{I}) \; f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)\, h$$

α étant une fonction définie sur I telle que $\lim_{h \to 0} \alpha = 0$.

Nous voyons donc que la recherche d'une fonction linéaire tangente à f en x_0 revient à la recherche, lorsque h tend vers zéro, de la limite de

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Théorème et définitions.

Dire que f est différentiable en x_0 est équivalent à dire que la fonction :

$$h \longmapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a une limite au point $h = 0$. Cette limite, quand elle existe, est le coefficient de la différentielle de f en x_0.

Cette limite, quand elle existe, s'appelle **dérivée** de f au point x_0 et on dit que f est **dérivable** au point x_0.

Si on appelle $f(x_0 + h) - f(x_0)$ *l'accroissement de la fonction* f associé à *l'accroissement* $(x_0 + h) - x_0 = h$ *de la variable* et $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ le *taux d'accroissement* de la fonction f entre x_0 et $x_0 + h$, on voit que la dérivée en x_0, lorsqu'elle existe, est la limite de ce taux d'accroissement au point $h = 0$.

Grace à cette équivalence entre différentiabilité et existence de la dérivée en un point, nous ferons appel suivant les cas et pour des raisons de commodité à l'une ou l'autre de ces notions.

EXEMPLE

Reprenons l'exemple précédent $f : x \longmapsto x^3 + x^2$; cette fonction est-elle dérivable en $x_0 = 1$?

On a $f(1) = 2$ et $f(1 + h) = (1 + h)^3 + (1 + h)^2 = 2 + 5h + 4h^2 + h^3$ d'où $\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = 5 + 4h + h^2$ et $\lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = 5$ donc f est dérivable en $x_0 = 1$, la dérivée de f en ce point est 5. On peut écrire

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} - 5 = \alpha(h)$$

pour tout $h \neq 0$ et prendre $\alpha(0) = 0$. On a alors :

$$(\forall h \in \mathbb{R}) \quad f(1 + h) = f(1) + 5h + \alpha(h)\, h \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \alpha = 0,$$

on retrouve le résultat précédent.

b) Premières propriétés des fonctions différentiables.

On sait que si $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite l quand h tend vers 0, cette limite est unique (§ 1.8 b). Donc la *fonction linéaire* : $h \longmapsto lh$ *tangente* à f en x_0, quand elle existe, est *unique*.

Si f est différentiable en x_0, on a vu que, sur un intervalle décrit par h, de centre zéro, on peut écrire :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)\, h \text{ avec } \lim_{h \to 0} \alpha = 0;$$

donc $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, ce qui signifie en posant $x = x_0 + h$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Par conséquent (cf. § 1.8 a, remarque 3).

Théorème.

Toute fonction différentiable (ou dérivable) au point x_0 est continue en ce point.

La réciproque n'est pas vraie. Soit, par exemple, la fonction f: $x \longmapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$. On a

$$\text{si } x \geqslant 0 \quad f(x) = x,$$
$$\text{si } x \leqslant 0 \quad f(x) = -x,$$

f est continue au point $x_0 = 0$ car $\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x) = f(0) = 0$.

Cherchons si f admet une dérivée au point $x_0 = 0$. Ici le changement de variable : $x = x_0 + h$ conduit à $x = h$, nous garderons donc dans les calculs la variable x. Le rapport

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

devient pour tout $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}.$$

Si $x > 0$ $\quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ et $\lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

si $x < 0$ $\quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$ et $\lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$

donc *f n'est pas dérivable au point* $x_0 = 0$ puisque les limites à gauche de 0 et à droite de 0 de $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ sont distinctes.

EXERCICES

Calculer les dérivées et trouver les fonctions linéaires tangentes aux fonctions numériques de la variable réelle suivante :

1. $x \longmapsto x^2$ au point $x_0 = 1$.
2. $x \longmapsto \frac{1}{x}$ au point $x_0 = 2$.
3. $x \longmapsto x^2 + 3x - 2$ au point $x_0 = 3$.
4. $x \longmapsto \frac{x+1}{x-2}$ au point $x_0 = -1$.

2. 2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES EN UN POINT

Posons $m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ $(h \neq 0)$, f étant l'une des fonctions suivantes :

1. Fonction constante : $x \longmapsto \lambda$, définie sur $\mathbb{R}$. On a

$$m(h) = \frac{\lambda - \lambda}{h} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} m(h) = 0.$$

Donc toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est dérivable en un point quelconque de $\mathbb{R}$ et sa dérivée est 0 en tout point de $\mathbb{R}$.

2. Fonction affine : $x \longmapsto ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$. Au point x_0 nous avons

$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b, \quad f(x_0) = ax_0 + b,$$

$$m(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{a(x_0 + h) + b - ax_0 - b}{h} = \frac{ah}{h},$$

comme $h \neq 0$ $\quad m(h) = a$ $\quad$ et $\quad \lim_{h \to 0} m(h) = a$. Donc

Toute fonction affine : $x \longmapsto ax + b$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et en tout point de $\mathbb{R}$ sa dérivée est a.

3. Fonction polynôme : $x \longmapsto ax^2 + bx + c$, définie sur $\mathbb{R}$. Au point x_0 nous avons

$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c, \quad f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c,$$

$$m(h) = \frac{a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c - ax_0^2 - bx_0 - c}{h} = \frac{ah^2 + (2ax_0 + b)h}{h}$$

d'où $(h \neq 0)$

$$m(h) = ah + 2ax_0 + b \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} m(h) = 2ax_0 + b. \text{ Donc}$$

Toute fonction : $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ et sa dérivée en x_0 est $2ax_0 + b$.

En particulier si l'on fait $a = 1$ et $b = 0$, nous voyons que la dérivée de la fonction : $x \longmapsto x^2$ au point x_0 est $2x_0$.

4. Fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Au point $x_0 \neq 0$ nous avons

$$f(x_0 + h) = \frac{1}{x_0 + h}, \; f(x_0) = \frac{1}{x_0},$$

$$m(h) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}\right) = \frac{1}{h}\frac{x_0 - x_0 - h}{(x_0 + h)\,x_0} = -\frac{1}{(x_0 + h)\,x_0},$$

$$\lim_{h \to 0} m(h) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

La fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée en x_0 est $\frac{-1}{x_0^2}$.

5. Fonction cosinus : $x \longmapsto \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$. Au point x_0 nous avons

$$m(h) = \frac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h} = -\frac{2\sin\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$m(h) = -\sin\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

On sait (voir cours de Première) que $\lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ et que la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{h \to 0} \sin\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \sin x_0$.

Par suite :

$$\lim_{h \to 0} m(h) = -\sin x_0.$$

La fonction cosinus : $x \longmapsto \cos x$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ et sa dérivée en x_0 est $-\sin x_0$.

6. Fonction sinus : $x \longmapsto \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$. Au point x_0 nous avons

$$m(h) = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$m(h) = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right).$$

On sait que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ et que la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ (voir cours de Première) donc $\lim\limits_{h \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \cos x_0$. Par suite :

$$\lim_{h \to 0} m(h) = \cos x_0.$$

La fonction sinus : $x \longmapsto \sin x$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ et sa dérivée en x_0 est $\cos x_0$.

2. 3 INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUES

a) Interprétation géométrique de la dérivée.

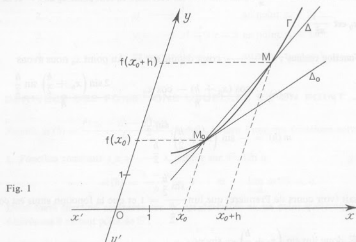


Fig. 1

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soient Γ sa présentation graphique (fig. 1) et Δ la droite passant par $M_0\,(x_0, f(x_0))$ et $M\,(x, f(x))$ de Γ. Le coefficient directeur de Δ est $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ou encore, en posant $x = x_0 + h$, $m(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Ce coefficient directeur n'est autre que le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$.

Nous donnerons la définition suivante :

Définition.

Soient Γ la représentation graphique d'une fonction numérique f de la variable réelle x et Δ_0 une droite passant par $M_0(x_0, f(x_0))$ de Γ et non parallèle à Oy. On dit que Δ_0 est tangente à Γ en M_0 si et seulement si le coefficient directeur de la droite passant par M_0 et $M\ (x_0 + h, f(x_0 + h))$ a pour limite le coefficient directeur de Δ_0 quand h tend vers zéro.

On sait que $m(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 si et seulement si f est dérivable au point x_0. On peut donc énoncer :

Théorème.

Pour que la représentation graphique Γ de f admette une tangente au point $M_0\ (x_0, f(x_0))$, non parallèle à Oy, il faut et il suffit que f soit dérivable au point x_0. Le coefficient directeur de cette tangente est alors la dérivée de f au point x_0.

Équation de la tangente. Si f a pour dérivée l au point x_0, la tangente Δ_0 au point M_0 de Γ a pour équation (cf. cours de Seconde)

$$y - f(x_0) = l\,(x - x_0)$$

que l'on peut écrire

$$y = f(x_0) + l\,(x - x_0).$$

REMARQUE

Nous avons vu que si f est dérivable en x_0, la dérivée en ce point étant l, il existe (cf. § 2.1) un nombre l et une fonction α définie sur un intervalle I de centre zéro tels que :

$$(\forall h \in \mathrm{I}) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + \alpha(h)\,h \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \alpha = 0,$$

ou encore sur un intervalle J de centre x_0 on a

$$(\forall x \in \mathrm{J}) \quad f(x) = f(x_0) + l\,(x - x_0) + \beta(x)\,(x - x_0),$$

en posant $\beta(x) = \alpha(x - x_0)$, on a aussi $\lim\limits_{x \to x_0} \beta = 0$.

Nous voyons alors que la fonction affine : $x \longmapsto f(x_0) + l\,(x - x_0)$ n'est autre que la fonction représentée graphiquement par la tangente Δ_0 en M_0 à Γ. Cette fonction s'appelle la **fonction affine tangente à f au point x_0**.

EXEMPLE

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3 + x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. On a vu (cf. § 2.1 a) que la dérivée de f au point $x_0 = 1$ est $l = 5$. On a $f(x_0) = 2$. Donc la fonction affine tangente à f au point $x_0 = 1$ est la fonction $x \longmapsto 2 + 5\,(x - 1)$. L'équation de la tangente Δ_0 à la représentation graphique Γ de f au point $M_0\ (1, 2)$ est donc : $y = 2 + 5\,(x - 1)$ ou encore, après réduction $y = 5\,x - 3$.

Pour construire Δ_0 remarquons que son équation peut s'écrire :

$y - f(x_0) = l\,(x - x_0)$ ou encore $y - y_0 = l\,(x - x_0)$ en posant $y_0 = f(x_0)$, nous aurons un deuxième point $M_1\ (x_1, y_1)$ de Δ_0 en prenant $x_1 - x_0 = 1$ par exemple, d'où $y_1 - y_0 = l$. Le vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ a pour coordonnées $x_1 - x_0 = 1$ et $y_1 - y_0 = l$.

Dans l'exemple considéré, l'équation de Δ_0 s'écrit : $y - 2 = 5\,(x - 1)$.

Si $x_1 - 1 = 1$ on a $y_1 - 2 = 5$.

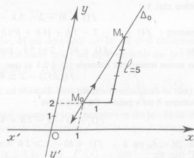


Fig. 2

Nous avons construit (fig. 2) la droite Δ_0 passant par M_0 et M_1, le vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ ayant pour coordonnées 1 et 5. La tangente Δ_0 est indiquée sur la figure par deux petites flèches de part et d'autre de M_0.

b) Interprétation géométrique de la différentielle.

La fonction f étant dérivable (ou différentiable) au point x_0, il existe une fonction α définie sur un intervalle I de centre zéro telle que

$$(\forall h \in I)\ f(x_0 + h) - f(x_0) = lh + \alpha(h)\, h \text{ avec } \lim_{h \to 0} \alpha = 0$$

$$(\forall h \in I)\ f(x_0 + h) - f(x_0) = h\,[l + \alpha(h)] \text{ avec } \lim_{h \to 0} \alpha = 0$$

donc si $l \neq 0$, lh est une valeur approchée de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ et on peut écrire $f(x_0 + h) - f(x_0) \simeq lh$ pour h « petit », c'est-à-dire (fig. 3)

$$\overline{PM} \simeq \overline{PM'}$$

Rappelons que $\overline{PM'} = lh$ est la *valeur de la différentielle de f au point x_0 pour un accroissement h de la variable x.*

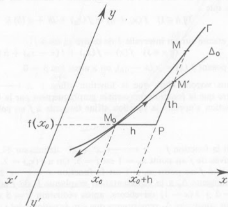


Fig. 3

EXEMPLE

Soit $f : x \longmapsto x^3 + x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. On a vu (cf. § 2.1 a) que quel que soit le nombre réel h :

$$f(1 + h) = 2 + 5h + 4h^2 + h^3$$

ou encore : $f(1 + h) - 2 = 5h + (4h + h^2)\, h$; remarquons que $\lim_{h \to 0} (4h + h^2) = 0$

donc : $f(1 + h) - 2 \simeq 5h$ pour h « petit »;

nous avons trouvé par exemple (cf. § 2.1 a) que :

$$f(1{,}017) - 2 \simeq 0{,}085.$$

On peut se demander comment sont disposés les points de Γ par rapport à la tangente Δ_0 lorsque h est « petit ». On peut écrire :

$$f(1 + h) - 2 = 5h + 4h^2\left(1 + \frac{h}{4}\right),$$

pour $|h| < 4$, on a : $f(1 + h) - 2 \geqslant 5h$ donc $\overline{PM} \geqslant \overline{PM'}$ d'où la disposition de Γ (fig. 4).

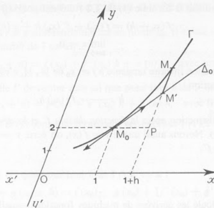


Fig. 4

EXERCICES

1. Déterminer la tangente à l'origine aux représentations graphiques des fonctions :

$$x \longmapsto x^2$$
$$x \longmapsto x^3$$
$$x \longmapsto x^4$$

Étudier comment est disposée la représentation graphique de chacune de ces fonctions par rapport à cette tangente.

2. Trouver l'équation de la tangente aux représentations graphiques Γ des fonctions suivantes au point de Γ d'abscisse x_0 et construire cette tangente :

$$x \longmapsto 2x^2, \quad x_0 = 1,$$
$$x \longmapsto \frac{3}{x} \quad x_0 = -1,$$
$$x \longmapsto x^2 - 2x, \quad x_0 = 0.$$

II. Fonction dérivée : définition, calcul

2. 4 FONCTION DÉRIVÉE

a) Définitions.

On dit que f définie sur $]a, b[$ est *dérivable sur* $]a, b[$ si et seulement si f est dérivable en tout point x de $]a, b[$. On dit aussi que f est *différentiable sur* $]a, b[$.

Considérons l'application de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$

$$x \longmapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

cette nouvelle fonction qui associe à tout nombre x de $]a, b[$ la dérivée de f au point x s'appelle la **fonction dérivée** de la fonction f. On la note f', d'où

$$(\forall x \in]a, b[)\quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

Avec cette définition la formule (1) du § 2.1 devient pour $x_0 \in]a, b[$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \alpha(h)\, h,$$

avec $$\lim_{h \to 0} \alpha = 0.$$

De même la fonction linéaire tangente à f en x_0 de $]a, b[$, c'est-à-dire la différentielle de f en x_0 est la fonction

$$h \longmapsto f'(x_0)\, h.$$

On notera la distinction entre la *fonction dérivée* f' et la *dérivée de f au point x* qui est le nombre $f'(x)$. Notons aussi que si $y = f(x)$, on écrit $y' = f'(x)$; y' est l'image de x par la fonction f'.

b) Exemples.

Nous avons calculé les dérivées de quelques fonctions usuelles en un point (cf. § 2.2).

1. La dérivée de la fonction constante $f: \ x \longmapsto \lambda$ en un point quelconque de $\mathbb{R}$ est 0. D'où :

La fonction dérivée de toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

2. La dérivée de la fonction affine $f: \ x \longmapsto ax + b$ en un point quelconque x de $\mathbb{R}$ est a. D'où :

La fonction dérivée de la fonction affine $f: \ x \longmapsto ax + b$ est la fonction constante $f': \ x \longmapsto a$ sur $\mathbb{R}$. Remarquons que f' est indépendante de la valeur de b.

3. La dérivée de la fonction $f: \ x \longmapsto ax^2 + bx + c$ en un point quelconque x de $\mathbb{R}$ est $2ax + b$. D'où :

La fonction dérivée de la fonction $f: \ x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est la fonction $f': \ x \longmapsto 2ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$. Remarquons que f' est indépendante de la valeur de c.

4. La dérivée de la fonction $f: \ x \longmapsto \frac{1}{x}$ en tout point $x \neq 0$ est $-\frac{1}{x^2}$.

D'où :

La fonction dérivée de la fonction $f: \ x \longmapsto \frac{1}{x}$ est la fonction $f': x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

5. La dérivée de la fonction cosinus : $x \longmapsto \cos x$ en un point quelconque x de $\mathbb{R}$ est $-\sin x$. D'où :

La fonction dérivée de la fonction cosinus : $x \longmapsto \cos x$ est la fonction : $x \longmapsto -\sin x$ définie sur $\mathbb{R}$.

6. La dérivée de la fonction sinus : $x \longmapsto \sin x$ en un point quelconque x de $\mathbb{R}$ est $\cos x$. D'où :

La fonction dérivée de la fonction sinus : $x \longmapsto \sin x$ est la fonction : $x \longmapsto \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$.

2. 5 OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

Soit deux fonctions f et g différentiables en un point x_0. Il existe un intervalle I de centre zéro tel que pour tout h de I on ait :

(1) $$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \alpha(h)\, h, \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \alpha = 0.$$

Il existe un intervalle I' de centre zéro tel que pour tout h de I' on ait :

(2) $$g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)\, h + \beta(h)\, h, \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \beta = 0.$$

Il en résulte que (1) et (2) sont simultanément vérifiées sur $I \cap I'$.

a) Addition.

On déduit de (1) et (2) que pour tout h de $I \cap I'$ on a :

$$f(x_0) + h) + g(x_0 + h) = f(x_0) + g(x_0) + [f'(x_0) + g'(x_0)]\, h + \gamma(h)\, h,$$

en posant $\gamma(h) = \alpha(h) + \beta(h)$,

$$(f + g)(x_0 + h) = (f + g)(x_0) + [f'(x_0) + g'(x_0)]\, h + \gamma(h)\, h,$$

et on a $\lim_{h \to 0} \gamma = \lim_{h \to 0} \alpha + \lim_{h \to 0} \beta = 0,$

ce qui montre que $f + g$ est différentiable en x_0, sa différentielle en x_0 étant

$$d(f + g)_{x_0} : \quad h \longmapsto [f'(x_0) + g'(x_0)]\, h = f'(x_0)\, h + g'(x_0)\, h = df_{x_0}(h) + dg_{x_0}(h),$$

sa dérivée en x_0 est $f'(x_0) + g'(x_0) = (f' + g')(x_0)$.

Lorsque f et g sont différentiables sur $]a, b[$, on peut alors énoncer :

Théorème.

Si f et g sont différentiables sur $]a, b[$, $f + g$ est différentiable sur $]a, b[$; la différentielle de $f + g$ en x_0 de $]a, b[$ est

(3) $$\boxed{d(f + g)_{x_0} = df_{x_0} + dg_{x_0}}$$

la fonction dérivée de $f + g$ est définie sur $]a, b[$ par

(3') $$\boxed{(f + g)' = f' + g'}$$

REMARQUE

1. Cette démonstration s'applique à un nombre fini de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ toutes différentiables sur $]a, b[$ et l'on a sur $]a, b[$

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'.$$

b) Multiplication par un nombre réel.

Si λ est un nombre réel donné, nous avons aussi pour tout h de I :

$$\lambda f(x_0 + h) = \lambda f(x_0) + \lambda f'(x_0)\, h + \lambda\alpha(h)\, h$$

$$(\lambda f)(x_0 + h) = (\lambda f)(x_0) + [\lambda f'(x_0)]\, h + \delta(h)\, h$$

en posant $\delta(h) = \lambda\alpha(h)$, on a $\lim_{h \to 0} \delta = \lambda \lim_{h \to 0} \alpha = 0$

donc λf est différentiable en x_0, sa différentielle en x_0 est

$$d(\lambda f)_{x_0} : \quad h \longmapsto [\lambda f'(x_0)]\, h = \lambda df_{x_0}(h),$$

sa dérivée en x_0 est $\lambda f'(x_0) = (\lambda f')(x_0)$.

Lorsque f est différentiable sur $]a, b[$, on peut alors énoncer :

Théorème.

Si f est différentiable sur $]a, b[$, λf est différentiable sur $]a, b[$; la différentielle de λ en x_0 de $]a, b[$ est

(4) $$d(\lambda f)_{x_0} = \lambda\, df_{x_0}$$

la fonction dérivée de λf est définie sur $]a, b[$ par

(4') $$(\lambda f)' = \lambda f'$$

REMARQUE

2. On pose $D =]a, b[$. Si l'on désigne par :
$\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle définies sur D,
$\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur D,
$\mathcal{D}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions différentiables sur D, et si l'addition de ces fonctions est notée $+$ et la multiplication d'une fonction par un nombre réel est notée $.$, on vérifiera, compte tenu des formules (3') et (4') que $(\mathcal{D}(D, \mathbb{R}), +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}(D, \mathbb{R}), +, .)$ qui est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, .)$.

c) Multiplication.

Nous avons aussi pour tout h de $I \cap I'$, en multipliant membre à membre les égalités (1) et (2) :

$$f(x_0 + h)\, g(x_0 + h) = f(x_0)\, g(x_0) + [f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)]\, h + \varepsilon(h)\, h,$$

en posant

$$\varepsilon(h) = \alpha(h)\,[g(x_0) + hg'(x_0)] + \beta(h)\,[f(x_0) + hf'(x_0)] + h\,[\alpha(h)\,\beta(h) + f'(x_0)g'(x_0)];$$

les théorèmes relatifs aux opérations sur les limites montrent que $\lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$ et pour tout h de $I \cap I'$ on a

$$(fg)(x_0 + h) = (fg)(x_0) + [f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)]\, h + \varepsilon(h)\, h, \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon = 0$$

donc fg est différentiable en x_0, sa différentielle en x_0 est

$$d(fg)_{x_0} : \; h \longmapsto [f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)]\, h = f(x_0)\, dg_{x_0}(h) + g(x_0)\, df_{x_0}(h),$$

sa dérivée en x_0 est $f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) = (f'g)(x_0) + (fg')(x_0)$.

Lorsque f et g sont différentiables sur $]a, b[$, on peut alors énoncer :

Théorème.

Si f et g sont différentiables sur $]a, b[$, fg est différentiable sur $]a, b[$; la différentielle de fg en x_0 de $]a, b[$ est

(5) $$d(fg)_{x_0} = f(x_0)\, dg_{x_0} + g(x_0)\, df_{x_0}$$

la fonction dérivée de fg est définie sur $]a, b[$ par

(5') $$(fg)' = f'g + fg'$$

REMARQUES

3. Cette démonstration s'applique à un nombre fini de fonctions $f_1, f_2, \dots f_n$, toutes dérivables sur $]a, b[$ et l'on a sur $]a, b[$
$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \dots f_1 f_2 \cdots f_n'$$
En particulier si : $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$, on a pour tout entier $n > 1$:

(6) $$(f^n)' = n\, f^{n-1} f'$$

On vérifiera que cette formule est encore vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ pourvu que f soit dérivable et que $f(x) \neq 0$ (rappelons que $a^0 = 1$ si $a \neq 0$ et que le symbole a^0 n'a pas de sens pour $a = 0$),

4. Si l'on note $\times$ la multiplication des fonctions numériques d'une variable réelle, les autres notations étant celles données à la remarque 2, on vérifiera, compte tenu des formules (3') et (5'), que : $(\mathcal{D}(D, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire. C'est un sous-anneau de $(\mathcal{C}(D, \mathbb{R}), +, \times)$ qui est lui-même un sous-anneau de $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +, \times)$.

Applications.

1. D'après (6), pour tout x réel et pour tout entier $n > 1$ on a
$$(x^n)' = nx^{n-1} \times 1 = nx^{n-1}.$$
Ce résultat est encore vrai pour $n = 0$ et pour $n = 1$, et pour tout $x \neq 0$.

2. Soit la **fonction polynôme** $f : \; x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$. D'après les formules précédentes, sa fonction dérivée est
$f' : x \longmapsto n a_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$ définie sur $\mathbb{R}$.

d) Inverse et quotient.

Supposons f différentiable en x_0 et $f(x_0) \neq 0$. Puisque f est différentiable en x_0, elle est continue en ce point (cf. § 2.1 b) donc $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ et on sait (cf. § 1.8 b) qu'il existe un intervalle I de centre zéro sur lequel $f(x_0 + h)$ a le signe de sa limite $f(x_0)$ donc on a $f(x_0 + h) \neq 0$ pour tout h de I.

Pour savoir si $\frac{1}{f}$ est différentiable en x_0, il est *plus simple* ici de chercher la limite en x_0 du taux d'accroissement de $\frac{1}{f}$ entre x_0 et $x_0 + h$:

$$m(h) = \frac{\dfrac{1}{f(x_0 + h)} - \dfrac{1}{f(x_0)}}{h} = -\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{hf(x_0)\, f(x_0 + h)}$$

$$m(h) = -\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \frac{1}{f(x_0)\, f(x_0 + h)}$$

puisque f est différentiable en x_0 on a $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$; f étant différentiable en x_0, elle est continue en ce point (cf. § 2.1 b) donc $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ par suite

$\lim_{h \to 0} m(h) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$, ce nombre est la dérivée de $\frac{1}{f}$ en x_0 et la différentielle de $\frac{1}{f}$ en x_0 est

$$d\left(\frac{1}{f}\right)_{x_0} : h \longmapsto -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}\, h = -\frac{df_{x_0}(h)}{[f(x_0)]^2}.$$

Plus généralement :

Théorème.

Si f ne s'annule pas et est différentiable sur $]a\,,b[$, $\frac{1}{f}$ est différentiable sur $]a\,,b[$; la différentielle de $\frac{1}{f}$ en x_0 de $]a\,,b[$ est

$$(7)\qquad d\left(\frac{1}{f}\right)_{x_0} = -\frac{df_{x_0}}{[f(x_0)]^2}$$

la fonction dérivée de $\frac{1}{f}$ est définie sur $]a\,,b[$ par

$$(7')\qquad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

Soit alors la fonction $\frac{f}{g}$, f et g étant différentiables sur $]a\,,b[$ et $g(x) \neq 0$ sur $]a\,,b[$.

On peut écrire $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$; $\frac{1}{g}$ est différentiable sur $]a\,,b[$ d'après le théorème précédent et f est différentiable sur $]a\,,b[$ donc le produit $f\frac{1}{g}$ est différentiable sur $]a\,,b[$ et sa différentielle en x_0 de $]a\,,b[$ est, d'après (5) et (7) :

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_{x_0} = d\left(f\frac{1}{g}\right)_{x_0} = f(x_0)\,d\left(\frac{1}{g}\right)_{x_0} + \frac{1}{g(x_0)}\,df_{x_0} = -\frac{f(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,dg_{x_0} + \frac{1}{g(x_0)}\,df_{x_0}$$

$$(8)\qquad d\left(\frac{f}{g}\right)_{x_0} = \frac{g(x_0)\,df_{x_0} - f(x_0)\,dg_{x_0}}{[g(x_0)]^2},$$

la fonction dérivée de $\frac{f}{g}$, d'après (5') et (7'), est définie sur $]a\,,b[$ par

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right)$$

$$(8')\qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Applications.

3. Une **fonction rationnelle** de la variable réelle x est le quotient de deux fonctions polynômes de la variable x qui sont dérivables pour tout x de $\mathbb{R}$. Donc une fonction rationnelle est dérivable pour tout x n'annulant pas son dénominateur.

4. En particulier soit la **fonction homographique** : $x \longmapsto \frac{ax+b}{a'x+b'}$, définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{b'}{a'}\right\}$ si l'on suppose $a' \neq 0$; posons

$$f(x) = ax + b \quad \text{d'où} \quad f'(x) = a$$
$$g(x) = a'x + b' \quad \text{d'où} \quad g'(x) = a',$$

pour tout $x \neq -\frac{b'}{a'}$, on a en appliquant la formule (8') :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{a(a'x+b') - (ax+b)a'}{(a'x+b')^2} = \frac{ab' - ba'}{(a'x+b')^2}$$

ce qu'on peut écrire : $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}{(a'x+b')^2}$

5. Soit la fonction $f : x \longmapsto x^n$ (n entier strictement négatif) qui a été étudiée au § 1.12 b.

On peut écrire $x^n = \frac{1}{x^{-n}} = \frac{1}{x^{n'}}$ en posant $n' = -n$, n' est un entier strictement positif et f est définie pour $x \neq 0$. En appliquant (7') et (6) on a pour tout $x \neq 0$:

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{n'}}\right)' = -\frac{n'x^{n'-1}}{x^{2n'}} = -\frac{n'}{x^{n'+1}}$$

$$(x^n)' = \frac{n}{x^{-n+1}} = nx^{n-1}.$$

Donc, compte tenu du résultat de l'application 1, nous pouvons dire que pour tout $x \neq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

6. Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), la **fonction tangente** : $x \longmapsto \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est définie et elle est le quotient de deux fonctions dérivables, elle est donc dérivable et on a :

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

7. Pour tout $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), la **fonction cotangente** : $x \longmapsto \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ est définie et elle est le quotient de deux fonctions dérivables, elle est donc dérivable et on a :

$$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$$

EXERCICES

Calculer les dérivées, quand elles existent, des fonctions f définies par (ex. 1 à 6) :

1. $f(x) = (x^2 + 3x + 7)^4$.
2. $f(x) = (x-2)(x-3)^2(x+4)^3$.
3. $f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-3)^2}$.
4. $f(x) = 2x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.
5. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.
6. $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$.
7. Donner une valeur approchée de $f(1{,}003)$ sachant que f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^3 + 5x^2 - 1)^2$. (On utilisera la différentielle de f en $x_0 = 1$).

2. 6 COMPOSITION DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

Soit f une fonction différentiable en x_0 et g une fonction différentiable en $y_0 = f(x_0)$. Étudions si $g \circ f$ est différentiable en x_0.

En posant $x_0 + h = x$, on peut écrire la relation de définition d'une fonction f différentiable en x_0 de la façon suivante.

Il existe un intervalle I de centre x_0 tel que pour tout x de I;

(1) $$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)[f'(x_0) + \alpha(x)], \quad \text{avec } \lim_{x \to x_0} \alpha = 0.$$

Il existe de même un intervalle J de centre $y_0 = f(x_0)$ tel que pour tout y de J :

(2) $$g(y) = g(y_0) + (y - y_0)[g'(y_0) + \beta(y)], \quad \text{avec } \lim_{y \to y_0} \beta = 0.$$

Nous pouvons supposer β *continue* en y_0 (cf. § 2.1 a) c'est-à-dire que $\beta(y_0) = \lim_{y \to y_0} \beta = 0$.

Puisque f est différentiable en x_0, elle est continue en ce point (cf. § 2.1 b) donc il existe un intervalle I' de centre x_0 tel que $f(\text{I}') \subset \text{J}$ (cf. § 1.1, définition).

Pour tout x de $\text{I} \cap \text{I}'$, la fonction $g \circ f$ est alors définie et on peut écrire en remplaçant dans (2) le nombre y par $f(x)$ et y_0 par $f(x_0)$:

$$g[f(x)] = g[f(x_0)] + [f(x) - f(x_0)][g'[f(x_0)] + \beta[f(x)]],$$

remplaçons $f(x) - f(x_0)$ par son expression tirée de (1) :

$$g[f(x)] = g[f(x_0)] + (x - x_0)[f'(x_0) + \alpha(x)][g'[f(x_0)] + \beta[f(x)]].$$

(3) $$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + (x - x_0)[g'[f(x_0)]f'(x_0) + \gamma(x)],$$

avec $$\gamma(x) = \alpha(x)\, g'[f(x_0)] + f'(x_0)\, \beta[f(x)] + \alpha(x)\, \beta[f(x)],$$

la fonction f est continue en x_0, la fonction β est continue en $y_0 = f(x_0)$ donc la composée $\beta \circ f$ est continue en x_0 (cf. § 1.2) par suite

$$\lim_{x \to x_0} \beta[f(x)] = \beta[f(x_0)] = \beta(y_0) = 0,$$

on a aussi $\lim_{x \to x_0} \alpha = 0$ donc en appliquant les théorèmes relatifs aux opérations sur les limites, on déduit $\lim_{x \to x_0} \gamma = 0$. L'égalité (3) montre alors que $g \circ f$ est différentiable en x_0, sa différentielle en x_0 est (puisque $x - x_0 = h$)

(4) $$d(g \circ f)_{x_0} : \quad h \longmapsto g'[f(x_0)]f'(x_0)\, h,$$

mais on peut remarquer que l'on a

$$df_{x_0} \quad : \quad h \longmapsto f'(x_0)h = k$$
$$dg_{f(x_0)} \quad : \quad k \longmapsto g'[f(x_0)]\, k$$

donc

(5) $$(dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0})(h) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0)\, h$$

par suite, en comparant (4) et (5) :

$$\boxed{d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0}} \;;$$

il résulte de (4) que la dérivée de $g \circ f$ en x_0 est le coefficient de la différentielle :

$$g'[f(x_0)]f'(x_0) = (g' \circ f)(x_0) \times f'(x_0).$$

Plus généralement si x_0 décrit $]a, b[$:

Théorème.

Si f est différentiable sur $]a, b[$ et si g est différentiable en tout point de $f(]a, b[)$, la composée $g \circ f$ est différentiable sur $]a, b[$ et

1. La différentielle en x_0 de $]a, b[$ de la composée des deux fonctions est la *composée* des différentielles de ces fonctions aux points correspondants.

2. La dérivée en x_0 de la composée des deux fonctions est le *produit* des dérivées de ces fonctions aux points correspondants

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)]\, f'(x_0)}$$

3. La fonction dérivée de $g \circ f$ est définie sur $]a, b[$ par :

$$\boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'}$$

Applications.

1. Soit la fonction : $x \longmapsto \cos(ax + b)$ définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction n'est autre que la fonction $g \circ f$ avec f : $x \longmapsto ax + b$ et g : $x \longmapsto \cos x$ qui sont dérivables pour tout x réel. Donc la fonction : $x \longmapsto \cos(ax + b)$ est dérivable pour tout x réel et on peut écrire :
$$[\cos(ax + b)]' = \underbrace{-\sin(ax + b)}_{g'[f(x)]} \times \underbrace{a}_{f'(x)} = -a \sin(ax + b).$$

2. De même la fonction : $x \longmapsto \sin(ax + b)$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est autre que la fonction $g \circ f$ avec f : $x \longmapsto ax + b$ et g : $x \longmapsto \sin x$ qui sont dérivables pour tout x réel. Donc la fonction : $x \longmapsto \sin(ax + b)$ est dérivable pour tout x réel et on peut écrire :
$$[\sin(ax + b)]' = \underbrace{\cos(ax + b)}_{g'[f(x)]} \times \underbrace{a}_{f'(x)} = a \cos(ax + b).$$

EXERCICES

Calculer les dérivées, quand elles existent, des fonctions f définies par :

1. $f(x) = \text{tg}(ax + b)$.
2. $f(x) = \text{cotg}(ax + b)$.
3. $f(x) = \cos(x^{\text{o}})$ $\left(\text{on rappelle que } \cos(x^{\text{o}}) = \cos \frac{\pi}{180} x\right)$.
4. $f(x) = \text{tg}(x^{\text{gr}})$.
5. Donner une valeur approchée de $\sin(31^{\text{o}})$, $\text{tg}(46^{\text{o}})$ (utiliser les différentielles).

2. 7. FONCTION RÉCIPROQUE D'UNE FONCTION DIFFÉRENTIABLE ET STRICTEMENT MONOTONE

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$. On sait (cf. § 1.7) que f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ et que sa fonction réciproque f^{-1} est une bijection continue, strictement monotone de $[f(a), f(b)]$ sur $[a, b]$ et variant dans le même sens que f.

Nous pouvons écrire $(\forall y \in [a, b])\ (\forall x \in [f(a), f(b)])$ $\quad y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = f(y)$.

Supposons f différentiable en y_0 de $]a, b[$ et cherchons si f^{-1} est différentiable en $x_0 = f(y_0)$ de $]f(a), f(b)[$. Plutôt que d'utiliser la définition d'une fonction différentiable,

il est plus simple (et équivalent) de chercher la limite au point x_0 du taux d'accroissement de f^{-1} entre x_0 et x de $]f(a), f(b)[$ $(x \neq x_0)$

$$m(x) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)},$$

f^{-1} étant bijective, on a pour tout x de $]f(a), f(b)[$: $x \neq x_0 \Longrightarrow y \neq y_0$ donc on peut écrire

$$m(x) = \frac{1}{\dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}}$$

On sait que $\quad \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0)$

mais il s'agit de trouver la limite en x_0 du rapport $\dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}$ dans lequel $y = f^{-1}(x)$, montrons que cette limite est encore $f'(y_0)$.

En effet quel que soit $\alpha > 0$, on peut trouver $\beta > 0$ tel que pour tout y réel :

(1) $\quad 0 < |y - y_0| < \beta \Longrightarrow$ (2) $\left|\dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} - f'(y_0)\right| < \alpha.$

Comme f^{-1} est continue en x_0, on peut trouver $\gamma > 0$ tel que pour tout x réel

$$|x - x_0| < \gamma \Longrightarrow |y - y_0| < \beta.$$

Si $x \neq x_0$ on a vu que $y \neq y_0$ donc pour tout x réel on a

$$0 < |x - x_0| < \gamma \Longrightarrow (1) \Longrightarrow (2),$$

ce qui montre que la limite, quand x tend vers x_0, du rapport $\dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}$ dans lequel $y = f^{-1}(x)$, est $f'(y_0)$.

Si $f'(y_0) \neq 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to x_0} m(x) = \dfrac{1}{f'(y_0)} = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(x_0)]} = \dfrac{1}{(f' \circ f^{-1})(x_0)}$ c'est la dérivée de f^{-1} en x_0, elle est l'inverse de la dérivée de f en y_0.

On a aussi : $\quad df_{y_0} : h \longmapsto f'(y_0)\, h = k$

$$df_{x_0}^{-1} : k \longmapsto \frac{1}{f'(y_0)}\, k$$

donc $\quad (df_{x_0}^{-1} \circ df_{y_0})(h) = \dfrac{1}{f'(y_0)}\, f'(y_0)\, h = h$

donc $\quad df_{x_0}^{-1} \circ df_{y_0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, \quad \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ étant l'identité de $\mathbb{R}$.

Concluons :

Théorème.

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et si f admet une dérivée non nulle sur $]a, b[$, sa fonction réciproque f^{-1} est différentiable sur $]f(a), f(b)[$ et

1. La différentielle de f^{-1} en $x_0 = f(y_0)$ de $]f(a), f(b)[$ est la fonction *réciproque* de la différentielle de f en y_0.

2. La dérivée de f^{-1} en x_0 est l'*inverse* de la dérivée de f en y_0 $\quad \boxed{(f^{-1})'(x_0) = \dfrac{1}{f'(y_0)}}$

3. La fonction dérivée de f^{-1} est définie sur $]f(a), f(b)[$ par $\quad \boxed{(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$

Application.

Si n est un entier naturel non nul, on peut écrire (cf. § 1.13) :

$$[\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2] \qquad y = \sqrt[n]{x} \Longleftrightarrow x = y^n$$

la dérivée de f : $y \longmapsto x = y^n$ au point $y > 0$ est

$$f'(y) = ny^{n-1} \neq 0$$

la dérivée de f^{-1} : $x \longmapsto y = \sqrt[n]{x}$ au point $x > 0$ correspondant est

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n\,(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

Cette dérivée peut encore s'écrire en remarquant que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (cf. § 1.14 a)

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n\, x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}}$$

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}$$

cette formule est de la même forme que :

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

que l'on a trouvé au § 2.5 dans le cas où $n \in \mathbb{Z}$ et $x \neq 0$.

Plus généralement, si $x > 0$ et si r est un nombre rationnel quelconque on a défini (cf. § 1.14 a) le symbole x^r.

si $r > 0$, soit $\dfrac{p}{q}$ un représentant de r, p et q appartenant à $\mathbb{N}^*$.

La fonction : $x \longmapsto x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ n'est autre que la fonction $g \circ f$ avec f : $x \longmapsto x^p$ et g : $x \longmapsto x^{\frac{1}{q}}$ dérivables pour tout $x > 0$ donc (cf. § 2.6)

$$\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \left[(x^p)^{\frac{1}{q}}\right]' = \underbrace{\frac{1}{q}\,(x^p)^{\frac{1}{q}-1}}_{g'[f(x)]} \times \underbrace{p\,x^{p-1}}_{f'(x)} = \frac{p}{q}\, x^{\frac{p}{q}-1}$$

et on peut écrire quel que soit le nombre rationnel $r > 0$, x étant la variable réelle > 0

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

si $r < 0$, la fonction : $x \longmapsto x^r = \dfrac{1}{x^{-r}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ n'est autre que la fonction $\dfrac{1}{f}$ avec f : $x \longmapsto x^{-r}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Puisque $-r > 0$, $(x^{-r})' = -rx^{-r-1}$

par suite $\quad (x^r)' = \left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -\dfrac{-rx^{-r-1}}{(x^{-r})^2}$

on a encore $\quad (x^r)' = rx^{r-1}$

si $r = 0$, nous supposons toujours $x > 0$,

$$x^r = x^0 = 1 \quad \text{et} \quad (x^r)' = 0 = rx^{r-1}.$$

Conclusion :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad (\forall r \in \mathbb{Q}) \qquad (x^r)' = r\,x^{r-1}}$$

EXERCICES

Existence et calcul des dérivées des fonctions f définies par (ex. 1 à 4).

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.
2. $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 2}$.
3. $f(x) = x\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.
4. $f(x) = \sqrt{2\sin^2 x - 1}$.
5. Soit la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos x$. Montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, +1]$ (cf. § 1.7; exercice 1). Calculer la dérivée de f^{-1} en un point x de $]-1, +1[$.
6. Soit la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x$. Montrer que f est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, +1]$ (cf. § 1.7, exercice 2). Calculer la dérivée de f^{-1} en un point x de $]-1, +1[$.
7. Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \operatorname{tg} x$. Montrer que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de f^{-1} en un point x de $\mathbb{R}$.

2. 8 FONCTIONS DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Si f est dérivable sur $]a, b[$ c'est-à-dire en tout point de $]a, b[$, elle admet une fonction dérivée f' définie sur $]a, b[$. Si f' est elle-même dérivable sur $]a, b[$, elle admet une fonction dérivée définie sur $]a, b[$ qui s'appelle la **fonction dérivée seconde** de f (ou la **fonction dérivée d'ordre** 2 de f) et qu'on note f''. On dit que f est dérivable deux fois sur $]a, b[$. Plus généralement on définira ainsi les fonctions dérivées successives de f sur $]a, b[$ si elles existent, $f^{(3)}$ ou f''', ..., $f^{(n)}$ appelées **fonction dérivée troisième** (ou d'ordre 3), ..., **fonction dérivée** $n^{\text{ième}}$ (ou d'ordre n) de f. On dit alors que f est **dérivable n fois sur** $]a, b[$.

Par analogie la fonction dérivée f' de f sera aussi appelée **fonction dérivée première** (ou d'ordre 1) de f.

Posons $y = f(x)$. Les nombres $y'' = f''(x)$, $y''' = f'''(x)$, ..., $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ sont les images de x ($x \in]a, b[$) par les fonctions f'', f''', ..., $f^{(n)}$. On les appelle *dérivée seconde* (ou d'ordre 2), *dérivée troisième* (ou d'ordre 3), ..., *dérivée* $n^{\text{ième}}$ (ou d'ordre n) de la fonction f au point x de $]a, b[$.

EXERCICES

1. Calculer les dérivées successives de la fonction f définie par :
$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + x - 1.$$
Quelle est la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction polynôme de la variable x de degré n? Que peut-on dire des dérivées suivantes?
2. Calculer les dérivées successives de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{1}{x - a} \quad \text{pour } x \neq a.$$
3. Soit n un entier naturel non nul, f et g deux fonctions dérivables n fois sur $]a, b[$. Démontrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ du produit fg est donnée par la formule suivante (formule de Leibnitz) :
$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + \ldots + C_n^p f^{(n-p)} g^{(p)} + \ldots + C_n^n fg^{(n)},$$
où les nombres C_n^p sont les coefficients binomiaux.

4. Démontrer que, pour tout x réel, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction cosinus est :
$$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$
et la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction sinus est : $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

III. Extensions de la notion de dérivée

2. 9 DÉRIVÉE A DROITE. DÉRIVÉE A GAUCHE

a) Définitions.

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 + |x|$ défini sur $\mathbb{R}$

$$\text{si } x \geqslant 0 \quad f(x) = x^2 + x,$$
$$\text{si } x \leqslant 0 \quad f(x) = x^2 - x;$$

étudions la limite de $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers 0.

Si $x > 0$ $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 + x}{x} = x + 1$ et $\lim\limits_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to +0} (x + 1) = 1$

Si $x < 0$ $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - x}{x} = x - 1$ et $\lim\limits_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to -0} (x - 1) = -1.$

La fonction f n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$ puisque

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

On dit que 1 est la *dérivée de la fonction f à droite au point* $x_0 = 0$ et que -1 est la *dérivée de la fonction f à gauche au point* $x_0 = 0$. Plus généralement :

Définitions.

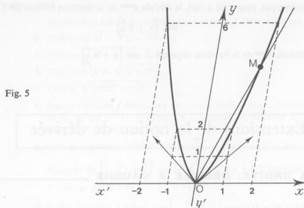
Soit une fonction f définie sur $[x_0, a[$ $(x_0 < a)$. On dit que la fonction f a une **dérivée à droite** au point x_0 si et seulement si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite à droite au point x_0.
On dit alors que f est dérivable à droite au point x_0.
Soit une fonction f définie sur $]a, x_0]$ $(a < x_0)$. On dit que la fonction f a une **dérivée à gauche** au point x_0 si et seulement si $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite à gauche au point x_0.
On dit alors que f est dérivable à gauche au point x_0.

REMARQUE

Pour que f soit dérivable au point x_0 il faut et il suffit que f admette une *dérivée à droite* et une *dérivée à gauche* au point x_0 qui soient *égales*.

Interprétation géométrique. Bornons-nous à étudier l'exemple précédent. Soit le point M $(x, f(x))$ de la représentation graphique Γ de f (fig. 5).

Fig. 5



Si $x > 0$ le coefficient directeur de la demi-droite [O, M) est $\frac{f(x)}{x} = x + 1$. Sa limite est 1 quand x tend vers 0 à droite. On dit que la représentation graphique Γ de f a une **demi-tangente à droite** à l'origine de coefficient directeur 1.

Si $x < 0$ le coefficient directeur de la demi-droite [O, M) est $\frac{f(x)}{x} = x - 1$. Sa limite est -1 quand x tend vers 0 à gauche. Γ a une **demi-tangente à gauche** à l'origine de coefficient directeur -1.

Les deux demi-tangentes en O n'ayant pas même support, on dit que O est un **point anguleux.**

EXERCICES

1. Soit la fonction $f : x \longmapsto |x - 1| + |x|$ définie sur ℝ. Étudier les dérivées de f à droite et à gauche au point $x_0 = 0$, au point $x_1 = 1$.
2. Soit la fonction $f : x \longmapsto |x^2 - 1|$ définie sur ℝ. Étudier les dérivées de f à droite et à gauche au point $x_0 = 1$. Construire les demi-tangentes correspondantes.
3. Soit la fonction $f : x \longmapsto |x(x+1)|$ définie sur ℝ. Étudier les dérivées de f à droite et à gauche au point $x_0 = 0$, au point $x_1 = -1$. Construire les demi-tangentes correspondantes.

b) Fonction dérivable sur un intervalle ouvert ou fermé.

Nous avons vu au § 2.4 que l'on appelle *fonction dérivable sur* $]a, b[$ toute fonction dérivable en tout point de $]a, b[$.

On dit que *f est dérivable sur* $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et si elle est dérivable à droite au point a et à gauche au point b. (On suppose $a < b$).

On dit que f est dérivable sur $]a, +\infty[$ si elle est dérivable en tout point x tel que $x > a$.

On dit que f est dérivable sur $[a, +\infty[$ si elle est dérivable sur $]a, +\infty[$ et si elle est dérivable à droite au point a.

On définira de même une fonction dérivable sur $[a, b[$ ou sur $]a, b]$ ou sur $]-\infty, a[$ ou sur $]-\infty, a]$.

On dit que f est dérivable sur $]-\infty, +\infty[$ si elle dérivable en tout point de ℝ.

2. 10 TANGENTE ET DEMI-TANGENTE PARALLÈLES A $y'y$

La fonction $f : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ a été étudiée au § 1.13. C'est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \sqrt[n]{\frac{x}{x^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Si *n est un entier supérieur à* 1 on a :

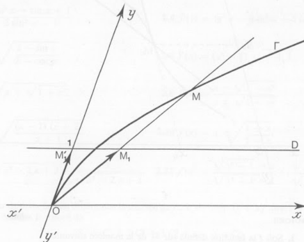
$$\lim_{x \to +0} x^{n-1} = 0$$

$$\lim_{x \to +0} \sqrt[n]{x^{n-1}} = 0 \qquad \text{(cf § 1.13 c)}$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = +\infty$$

Interprétons géométriquement ce résultat. Soit le point M $(x, f(x))$ de la représentation graphique Γ de la fonction f (fig. 6). Le coefficient directeur de la demi-droite [O , M) est $\frac{f(x)}{x}$, sa limite est $+\infty$ quand x tend vers 0 à droite.

Fig. 6



Étudions le point M_1 (x_1, y_1) intersection de cette demi-droite avec la droite D d'équation $y = 1$. On a $\frac{y_1}{x_1} = \frac{f(x)}{x}$

d'où, comme $y_1 = 1$, $x_1 = \frac{x}{f(x)} = \sqrt[n]{x^{n-1}}$

On a vu que $\lim_{x \to +0} \sqrt[n]{x^{n-1}} = 0$. On peut donc dire que, quand x tend vers zéro à droite, les coordonnées x_1, y_1 de $\overrightarrow{OM_1}$ ont respectivement pour limites les coordonnées 0, 1 de $\overrightarrow{OM'_1}$. La demi-droite [O , M'_1) est la **demi-tangente à droite au point** O à Γ.

Plus généralement si f est continue en x_0 (ou seulement à droite ou à gauche) et si la limite de $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est $+\infty$ ou $-\infty$ en x_0 (ou à droite ou à gauche en x_0), les coordonnées de $\overrightarrow{M_0M}$ sont $x-x_0$, $f(x)-f(x_0)$ et celles de $\overrightarrow{M_0M_1}$ sont $\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$, 1 et ont pour limites respectivement les coordonnées 0, 1 de $\overrightarrow{M_0M_1'}$ (fig. 7). Nous dirons que la représentation graphique Γ de f a une tangente (ou une demi-tangente) parallèle à Oy au point M_0.

Nous verrons plus loin (cf. § 4) une définition plus générale de la tangente à une représentation graphique Γ.

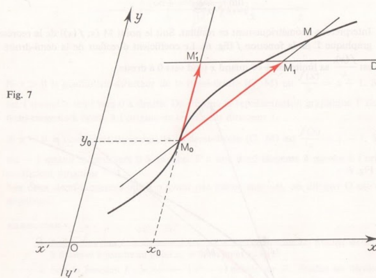


Fig. 7

EXERCICES

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

si $x \geqslant 0$ $\quad f(x)=\sqrt{x}$

si $x \leqslant 0$ $\quad f(x)=-\sqrt{-x}$.

Examiner si la représentation graphique Γ de f admet une tangente à l'origine.

2. Même question pour la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x)=\sqrt{|x|}.$$

3. Même question pour la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x)=\sqrt[3]{x^2}.$$

4. Montrer que la courbe d'équation

$$y=\sqrt{2x(4-x)}$$

admet des demi-tangentes parallèles à Oy à l'origine et au point (4, 0).

EXERCICES

Calcul de dérivées : ex. 1 à 13-24-25.
Différentielles et valeurs approchées : ex. 14 à 16.
Tangente et demi-tangente à une courbe : ex. 17 à 20.
Dérivées successives : ex. 16-21-22-23.

Existence et calcul des dérivées des fonctions f telles que (ex. 1 à 12) :

2.1 $f(x)=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

2.2 $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

2.3 $f(x)=\dfrac{\sin^2 x-\sin x+1}{2\sin^2 x-1}$.

2.4 $f(x)=\operatorname{tg}^3 x-4\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x-1$.

2.5 $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-\sin x}{2-\cos x}}$.

2.6 $f(x)=(x^2-1)\sqrt{x^2+1}$.

2.7 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$.

2.8 $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

2.9 $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+1}}$.

2.10 $f(x)=x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

2.11 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

2.12 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

2.13 *a)* Calculer de deux façons différentes la dérivée de $f : x \longmapsto (1+x)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) en tout point x de $\mathbb{R}$. En déduire le calcul de

$$S_1=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n.$$

b) Calculer de même

$$S_2=2C_n^2+6C_n^3+\ldots+n(n-1)C_n^n.$$

c) En déduire le calcul de

$$S_3=2^2C_n^2+3^2C_n^3+\ldots+n^2C_n^n.$$

2.14 Soit la fonction $f : x \longmapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$) définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Calculer la différentielle de f au point $x_0=1$. En déduire que pour h « petit » :

$$(1+h)^r \simeq 1+rh.$$

b) On suppose $r=-1$. Montrer que $f(1+h)=1-h+\dfrac{h^2}{1+h}$.

Calculer $f(1{,}000\,79)$ par défaut avec une erreur inférieure à 10^{-8}.

2.15 a) Trouver la différentielle de $f : x \longmapsto x^3$ au point x_0 de $\mathbb{R}$.

b) Soit un cube de métal dont les arêtes ont pour longueur x_0 à la température de 0 degré et pour longueur x à la température de t degrés. On appelle coefficient de dilatation linéaire le nombre α tel que :

$$x = x_0 (1 + \alpha t).$$

Si v_0 est le volume du cube à 0 degré et v son volume à t degrés, on appelle coefficient de dilatation cubique le nombre β tel que :

$$v = v_0 (1 + \beta t).$$

Si $h = x - x_0 = x_0 \alpha t$, quelle est la valeur de la différentielle de f au point x_0 pour l'accroissement h de la variable x?
En déduire que le *coefficient de dilatation cubique est sensiblement le triple du coefficient de dilatation linéaire.*

2.16 Soit f une fonction polynôme du 3e degré. Démontrer que :

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}) \quad (\forall h \in \mathbb{R}) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0).$$

Si $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 7$, calculer $f(3{,}002)$ par défaut avec une erreur inférieure à 10^{-4} à 10^{-7}.

Examiner si la représentation graphique Γ de f admet une tangente (ou des demi-tangentes) et, « placer » Γ par rapport à cette tangente (ou ces demi-tangentes) dans les cas suivants (ex. 17 à 20) :

2.17 $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ à l'origine.

2.18 $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ au point (1, 0).

2.19 $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}$ à l'origine; au point (1, 0).

2.20 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ à l'origine.

2.21 a) Calculer les dérivées successives, quand elles existent, de la fonction : $x \longmapsto \dfrac{1}{x-a}$.

b) Même question avec la fonction : $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$.

c) Même question avec la fonction : $x \longmapsto \dfrac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$

$$\left(\text{qu'on écrira sous la forme } \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}\right).$$

2.22 a) Démontrer que, pour tout x réel, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction cosinus est :

$$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

et la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction sinus est :

$$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

En déduire la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction : $x \longmapsto \cos(ax + b)$ et de la fonction : $x \longmapsto \sin(ax + b)$, a et b étant deux nombres réels donnés.

b) Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction : $x \longmapsto \sin^2 x$ en un point quelconque x de $\mathbb{R}$.

2.23 a) Soit n un entier naturel non nul, f et g deux fonctions dérivables n fois sur $]a, b[$. Démontrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ du produit fg est donnée par la formule suivante *(formule de Leibnitz)* (cf. § 2.8, ex. 3).

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + \ldots + C_n^p f^{(n-p)} g^{(p)} + \ldots + C_n^n f g^{(n)},$$

où les nombres C_n^p sont les coefficients binomiaux.

b) Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction : $x \longmapsto (x^2 + 3x - 1) \sin x$ en un point quelconque x de $\mathbb{R}$.

Sujets d'étude.

2.24 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \qquad \text{si } x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

a) Montrer que f est continue pour tout x réel.

b) Montrer que f est dérivable pour tout x réel.

c) Montrer que la fonction dérivée f' n'est pas continue pour $x = 0$. En déduire qu'*une fonction f peut avoir une dérivée en un point sans que la fonction dérivée f' ait une limite en ce point.*

2.25 a) Calculer de deux façons différentes la dérivée, quand elle existe, de la fonction numérique f de la variable réelle : $x \longmapsto \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) En déduire le calcul de la somme

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + n x^{n-1}.$$

c) On suppose $|x| < 1$ et on pose $|x| = \dfrac{1}{1+\alpha}$ $(\alpha > 0)$ par suite

$$|x|^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} = \frac{1}{1 + n\alpha + \dfrac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n}.$$

Montrer que $n|x|^n < \dfrac{2}{(n-1)\alpha^2}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n|x|^n$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

d) Soit la fonction numérique g de la variable réelle : $x \longmapsto \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ (on suppose toujours $|x| < 1$). Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = g'(x)$.

e) Calculer, de même, la somme

$$\Sigma_n = 2 + 6x + 12x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}.$$

En supposant $|x| < 1$, étudier, de même, $\lim\limits_{n \to +\infty} \Sigma_n$.

3| Etude d'une fonction numérique d'une variable réelle.

Ce chapitre est consacré à l'application des notions précédentes de continuité, limites, dérivées à l'étude des fonctions numériques d'une variable réelle.
Le **sens de variation** *d'une fonction se déduit, le plus souvent, du signe de sa dérivée, quand elle existe, mais nous avons montré que, dans certains cas, on pouvait étudier ce sens de variation sans l'aide de la dérivée.*
De même que la recherche des **extremums** *d'une fonction peut se faire avec ou sans l'aide de la dérivée, selon les cas, tandis que la recherche des* **points d'inflexion** *de la courbe représentative peut se faire avec ou sans l'aide de la dérivée seconde.*
Nous avons indiqué comment on pouvait, dans certains cas (fonction paire, impaire, périodique, etc.), **réduire l'ensemble d'étude** *de la fonction considérée.*
Nous avons également insisté sur l'étude des **branches infinies** *de la courbe représentative.*
Le **plan d'étude** *ainsi dégagé est appliqué à quelques exemples qui compléteront ceux déjà étudiés dans les classes précédentes.*

3. 1. SENS DE VARIATION

a) Rappel de quelques définitions.

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I (ouvert ou fermé). On appelle taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 distincts de I le nombre $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. On dit que f est **croissante** sur I si et seulement si, quels que soient x_1 et x_2 distincts de I :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant 0.$$

On dit que f est **strictement croissante** sur I si et seulement si, quels que soient x_1 et x_2 distincts de I :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

On dit que f est **décroissante** sur I si et seulement si, quels que soient x_1 et x_2 distincts de I :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant 0.$$

On dit que f est **strictement décroissante** sur I si et seulement si, quels que soient x_1 et x_2 distincts de I :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

On dit que f est **monotone** sur I si et seulement si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.
On dit que f est **strictement monotone** sur I si et seulement si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Cas particulier : On sait que f est **constante** sur I si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que, pour tout x de I, $f(x) = k$. On peut dire que f est constante sur I si et seulement si, quels que soient x_1 et x_2 distincts de I, on a $f(x_2) = f(x_1)$ c'est-à-dire

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.$$

Étudier le sens de variation d'une fonction numérique f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ c'est partager, lorsque c'est possible, D en un nombre fini d'intervalles tels que sur chacun d'eux f soit

ou bien constante
ou bien strictement croissante
ou bien strictement décroissante.

Nous dirons que deux fonctions f et g **varient dans le même sens** sur un intervalle I si et seulement si l'on sait partager I en un nombre fini d'intervalles partiels tels que sur chacun d'eux f et g soient toutes deux strictement croissantes ou toutes deux strictement décroissantes. Si, au contraire, sur chacun de ces intervalles, l'une des fonctions est strictement croissante et l'autre strictement décroissante, nous dirons que f et g **varient en sens contraires** sur I. Nous excluons le cas où l'une des fonctions est constante sur un intervalle partiel.

b) Étude du sens de variation sans l'aide de la dérivée.

Composition de fonctions strictement monotones.

Soit f une fonction strictement monotone sur I et g une fonction strictement monotone sur J ($f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$). Soit $g \circ f$ la fonction composée définie sur I, son taux d'accroissement entre x_1 et x_2 quelconques, distincts, de I est :

$$\frac{g[f(x_2)] - g[f(x_1)]}{x_2 - x_1} = \frac{g(y_2) - g(y_1)}{y_2 - y_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

en posant $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ce taux d'accroissement est strictement positif si

$$\frac{g(y_2) - g(y_1)}{y_2 - y_1} \quad \text{et} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

sont de même signe c'est-à-dire si f et g sont toutes deux strictement croissantes ou toutes deux strictement décroissantes respectivement sur I et sur J ; ce taux d'accroissement est strictement négatif si

$$\frac{g(y_2) - g(y_1)}{y_2 - y_1} \quad \text{et} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

sont de signes contraires c'est-à-dire si l'une des deux fonctions f ou g est strictement croissante et l'autre strictement décroissante sur les intervalles correspondants I ou J.

On peut énoncer :

Théorème.

Si f et g sont toutes deux strictement croissantes ou toutes deux strictement décroissantes respectivement sur les intervalles I et J ($f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$), la fonction composée $g \circ f$ est strictement croissante sur I. Si l'une des deux fonctions f ou g est strictement croissante et l'autre strictement décroissante sur les intervalles correspondants I ou J, la fonction composée $g \circ f$ est strictement décroissante sur I.

Applications.

Ce théorème peut aussi s'énoncer :

Soit deux fonctions f et g strictement monotones respectivement sur les intervalles I et J ($f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$), la fonction composée $g \circ f$ varie sur I dans le même sens que f ou en sens contraire suivant que g est strictement croissante ou strictement décroissante sur J.
C'est sous cette forme que nous allons utiliser le théorème. Nous supposerons que l'on sait étudier le sens de variation de f et nous utiliserons des fonctions g connues.

1. On sait que la fonction affine $g : x \longmapsto ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$. La fonction $g \circ f$ n'est autre que la fonction : $x \longmapsto af(x) + b$. Donc :
sur tout intervalle où f est définie, la fonction : $x \longmapsto af(x) + b$ varie dans le même sens que f, ou en sens contraire, suivant que l'on a : $a > 0$ ou $a < 0$. Ce résultat est indépendant de b.

2. On sait que la fonction $g : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$. La fonction $g \circ f$ n'est autre que $f^2 : x \longmapsto [f(x)]^2$. Donc :
la fonction f^2 varie dans le même sens que f sur tout intervalle où $f(x) \geqslant 0$ et en sens contraire sur tout intervalle où $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE

1. Comparer les sens de variation de f et de f^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

3. On sait que la fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. La fonction $g \circ f$ n'est autre que $\frac{1}{f} : x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$.
Donc :
la fonction $\frac{1}{f}$ varie en sens contraire du sens de variation de f sur tout intervalle où $f(x)$ a un signe constant.

4. On sait que la fonction $g : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) définie sur $\mathbb{R}_+$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $g \circ f$ n'est autre que $\sqrt[n]{f} : x \longmapsto \sqrt[n]{f(x)}$. Donc :
la fonction $\sqrt[n]{f}$ varie dans le même sens que f sur tout intervalle où $f(x) \geqslant 0$.

Exemple 1. Soit à étudier le sens de variation de f : $x \longmapsto 2x^2 + x - 3$ définie sur $\mathbb{R}$. Mettons $f(x)$ sous sa forme canonique, pour tout x réel :

$$f(x) = 2\left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)$$
$$= 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{3}{2}\right]$$
$$= 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]$$
$$= 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$$

nous indiquons, dans un tableau, le sens de variation de chaque fonction auxiliaire en précisant le théorème employé :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$x + \frac{1}{4}$		↗	0	↗	
$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2$ (application 2)		↘	0	↗	
$2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$ (application 1)		↘	$-\frac{25}{8}$	↗	

Exemple 2. Soit à étudier le sens de variation de f : $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$. Mettons $f(x)$ sous sa forme canonique. Posons $x - 1 = \mathrm{X}$ ou encore $x = 1 + \mathrm{X}$; pour tout $x \neq 1$ c'est-à-dire pour tout $\mathrm{X} \neq 0$:

$$f(x) = \frac{2(1 + \mathrm{X}) + 1}{\mathrm{X}} = \frac{2\mathrm{X} + 3}{\mathrm{X}}$$
$$= 2 + \frac{3}{\mathrm{X}}$$
$$= 2 + \frac{3}{x - 1}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x - 1$		↗	0	↗	
$\frac{1}{x-1}$ (application 3)		↘	‖	↘	
$2 + \frac{3}{x-1}$ (application 1)		↘	‖	↘	

Exemple 3. Soit à étudier le sens de variation de f : $x \longmapsto \sqrt{2x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	
$2x^2 + 1$ (application 1)		↘	1	↗	
$\sqrt{2x^2+1}$ (application 4)		↘	1	↗	

Addition de fonctions strictement monotones.

Soit deux fonctions f et g variant dans le même sens sur un intervalle I. Quels que soien x_1 et x_2 distincts de I, le taux d'accroissement de $f + g$ entre x_1 et x_2 est :

$$\frac{f(x_2) + g(x_2) - f(x_1) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1},$$

il est du signe commun de $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ et de $\dfrac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$.

On peut énoncer :

Théorème.

Si f et g varient dans le même sens sur un intervalle I, leur somme $f + g$ varie sur I dans le même sens que f et g.

Exemple 4. La fonction f : $x \longmapsto -2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. La fonction g : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Donc la somme $f + g$: $x \longmapsto -2x + 1 + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

EXERCICES

2. Étudier le sens de variation de f : $x \longmapsto \dfrac{x^2 + 2x}{x + 1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

(On mettra $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$ en posant $x + 1 = \mathrm{X}$.)

3. Démontrer que si f et g varient dans le même sens sur I et si $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$ pour tout x de I, fg varie sur I dans le même sens que f et g.

c) Emploi de la dérivée.

Nous allons donner des théorèmes permettant de déduire le sens de variation d'une fonction du signe de sa dérivée. Leur emploi est souvent plus commode que l'emploi des définitions ou des théorèmes précédents.

Nous raisonnerons sur un intervalle ouvert I de ℝ, mais on verra que les résultats s'étendent aussi au cas où I est fermé.

Si f est constante sur I, on sait que cette fonction admet une dérivée nulle en tout point de I.

Réciproquement nous admettrons que si f admet une dérivée nulle en tout point de I, alors f est une fonction constante sur I. Donc

Théorème 1.

Une fonction est constante sur un intervalle I si et seulement si elle admet une dérivée nulle en tout point de I.

Soit f et g deux fonctions dérivables et ayant la même dérivée en tout point de I. Nous avons donc

$$(\forall x \in \mathrm{I}) \qquad f'(x) - g'(x) = 0,$$

la fonction $f - g$ a une dérivée nulle en tout point de I donc, d'après le théorème précédent, $f - g$ est une fonction constante sur I. Donc

Corollaire.

Si deux fonctions f et g ont la même dérivée en tout point d'un intervalle I, $f - g$ est une fonction constante sur I.

Soit f une fonction dérivable et croissante sur I. Sa dérivée en un point quelconque x de I est

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$x + h$ $(h \neq 0)$ étant un nombre quelconque de I. Puisque f est croissante sur I, on a $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$. Montrons que la limite $f'(x)$ ne peut être négative. En effet, si $f'(x) < 0$ il existe (cf. § 1.8 b) un intervalle pointé de centre zéro tel que, pour tout h de cet intervalle pointé, on ait $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ du signe de sa limite $f'(x)$ donc $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} < 0$, ce qui est impossible. Nous venons donc de démontrer que si f est dérivable et croissante sur I, on a $f'(x) \geqslant 0$ en tout point x de I.

Si f est dérivable et *strictement* croissante sur I, par un même raisonnement on aboutit à la même conclusion c'est-à-dire que $f'(x) \geqslant 0$ en tout point x de I, mais on ne peut avoir $f'(x) = 0$ en tout point d'un intervalle $]a, b[$ $(]a, b[\subset \mathrm{I})$ car, d'après le théorème 1, f serait constante sur $]a, b[$ ce qui est contraire à l'hypothèse : f strictement croissante sur I. Nous venons donc de démontrer que si f est dérivable et strictement croissante sur I, on a $f'(x) > 0$ en tout point x de I sauf en des points isolés où $f'(x) = 0$.

Réciproquement nous admettrons que si f est dérivable sur I et si $f'(x) \geqslant 0$ en tout point x de I, alors f est croissante sur I et nous admettrons que si f est dérivable sur I et si $f'(x) > 0$ en tout point x de I sauf en des points isolés où $f'(x) = 0$, alors f est strictement croissante sur I.

Nous pouvons énoncer :

Théorème 2.

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. La fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si $f'(x) > 0$ en tout point x de I sauf en des points isolés où $f'(x) = 0$.

On démontre de même que :

Théorème 3.

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. La fonction f est strictement décroissante sur I si et seulement si $f'(x) < 0$ en tout point x de I sauf en des points isolés où $f'(x) = 0$.

3. 2. RÉDUCTION DE L'ENSEMBLE D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle dont le domaine de définition est une partie D de ℝ. Au lieu d'étudier f sur D, on peut quelquefois étudier f seulement sur une partie D_0 plus simple $(\mathrm{D}_0 \subset \mathrm{D})$ et en déduire l'étude de f sur les autres parties de D.

a) Fonction paire.

Définition.

Une fonction f, de domaine de définition D, est paire si et seulement si

$$(\forall x \in \mathrm{D}) \qquad f(-x) = f(x).$$

Quand x décrit un intervalle I $(\mathrm{I} \subset \mathrm{D})$, $x' = -x$ décrit un intervalle I′ $(\mathrm{I}' \subset \mathrm{D})$. Des propriétés de f sur I nous allons déduire des propriétés de f sur I′.

Si f est constante sur I c'est-à-dire s'il existe un nombre réel k tel que, pour tout x de I, $f(x) = k$ alors pour tout x' de I′ on a, en posant $x' = -x$,

$$f(x') = f(-x) = f(x) = k$$

donc si f est constante sur I, elle est aussi constante sur I′ et prend la même valeur que sur I.

Si f est strictement monotone sur I, quels que soient x'_1 et x'_2 distincts de I′ les nombres $x_1 = -x'_1$ et $x_2 = -x'_2$ sont deux nombres distincts de I et l'on a

$$\frac{f(x'_2) - f(x'_1)}{x'_2 - x'_1} = \frac{f(-x_2) - f(-x_1)}{(-x_2) - (-x_1)} = -\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

les taux d'accroissement de f entre x'_1 et x'_2 d'une part et entre x_1 et x_2 d'autre part sont opposés donc si f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I, elle est strictement décroissante (resp. croissante) sur I′.

Le plan (affine) étant rapporté à des axes rectangulaires $x'x$, $y'y$, les points M $(x, f(x))$ et M′ $(-x, f(-x))$ sont symétriques par rapport à $y'y$. Quand x décrit I, $x' = -x$ décrit I′ et les ensembles décrits par M et M′ sont symétriques par rapport à $y'y$ (fig. 1).

Il suffira donc d'étudier f sur $[0, +\infty[$ (ensemble de définition, sens de variation, représentation graphique) pour en déduire l'étude de f sur $]-\infty, 0]$.

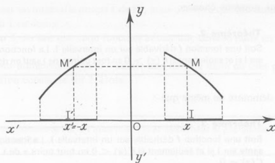


Fig. 1

REMARQUE

Plus généralement soit une fonction f, de domaine de définition D, telle que

$$(\forall x \in D) \quad f(a-x) = f(x).$$

a étant un nombre réel donné. Si $a = 0$, nous retrouvons le cas particulier précédent d'une fonction paire.

Le plan étant rapporté à des axes rectangulaires $x'x$, $y'y$, considérons les points M $(x, f(x))$ et M' $(a-x, f(a-x))$. Le milieu du segment [M, M'] a pour coordonnées

$$\frac{x + a - x}{2} = \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \frac{f(x) + f(a-x)}{2} = f(x)$$

donc ce point appartient à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$ (fig. 2).

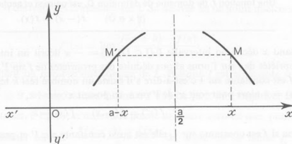


Fig. 2

Cette droite est un axe de symétrie pour la représentation graphique de f. On peut d'ailleurs se ramener au cas précédent d'une fonction paire en posant $x = \frac{a}{2} + X$.

Quand x décrit le domaine de définition D de f, X décrit une partie Δ de $\mathbb{R}$ et l'on a

$$(\forall X \in \Delta) \quad f\left(\frac{a}{2} - X\right) = f\left(\frac{a}{2} + X\right).$$

Soit φ la fonction : $X \longmapsto \varphi(X) = f\left(\frac{a}{2} + X\right)$ définie sur Δ. On a

$$(\forall X \in \Delta) \quad \varphi(-X) = \varphi(X)$$

donc la fonction φ est paire.

Il suffira donc d'étudier φ sur $[0, +\infty[$ ou encore d'étudier f sur $\left[\frac{a}{2}, +\infty\right[$.

EXERCICES

Étudier si f est paire ou s'il existe un nombre réel a tel que, D *étant domaine de définition de* f,

$$(\forall x \in D) \quad f(a-x) = f(x).$$

Indiquer, dans chaque cas, le domaine de définition.

1. $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2 - 9}}$.
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2}}$.
3. $f(x) = \sqrt{\cos 2x - \cos x}$.
4. $f(x) = \sin x - \sin^2 x$.
5. $f(x) = (x-1)^4 + (x-1)^2 + 2$.

b) Fonction impaire.

Définition.

Une fonction f, de domaine de définition D, est impaire si et seulement si

$$(\forall x \in D) \quad f(-x) = -f(x).$$

Quand x décrit un intervalle I (I ⊂ D), $x' = -x$ décrit un intervalle I' (I' ⊂ D). Des propriétés de f sur I, nous déduirons des propriétés de f sur I' que nous énoncerons (les démonstrations sont les mêmes qu'au sous-paragraphe *a*) précédent et ont été données en classe de Première) :

Si f est constante sur I, elle est constante sur I', et les valeurs prises par f dans ces deux intervalles sont opposées;

si f est strictement croissante sur I, elle est strictement croissante sur I';

si f est strictement décroissante sur I, elle est strictement décroissante sur I'.

Les points M $(x, f(x))$ et M' $(-x, f(-x))$ sont symétriques par rapport à O (fig. 3). Il suffira d'étudier f sur $[0, +\infty[$ (ensemble de définition, sens de variation, représentation graphique) pour en déduire l'étude de f sur $]-\infty, 0]$.

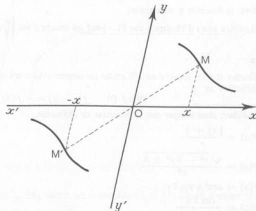


Fig. 3

REMARQUE

Plus généralement soit une fonction f, de domaine de définition D, telle que

$$(\forall x \in D) \quad f(a - x) = -f(x),$$

a étant un nombre réel donné. Si $a = 0$, nous retrouvons le cas particulier précédent d'une fonction impaire.

Considérons les points M $(x, f(x))$ et M' $(a - x, f(a - x))$. Le milieu A du segment [M , M'] a pour coordonnées

$$\frac{x + a - x}{2} = \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad \frac{f(x) + f(a - x)}{2} = 0$$

donc A est fixe et représente un centre de symétrie pour la représentation graphique de f (fig. 4).

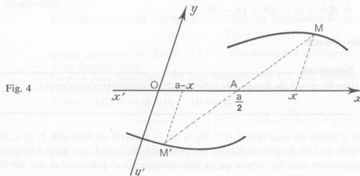


Fig. 4

On peut se ramener au cas précédent d'une fonction impaire en posant $x = \frac{a}{2} + X$.

Quand x décrit le domaine de définition D de f, X décrit une partie Δ de $\mathbb{R}$ et l'on a

$$(\forall X \in \Delta) \quad f\left(\frac{a}{2} - X\right) = -f\left(\frac{a}{2} + X\right).$$

Soit φ la fonction : $X \longmapsto \varphi(X) = f\left(\frac{a}{2} + X\right)$ définie sur Δ. On a

$$(\forall X \in \Delta) \quad \varphi(-X) = -\varphi(X)$$

donc la fonction φ est impaire.

Il suffira alors d'étudier φ sur $[0, +\infty[$ ou encore f sur $\left[\frac{a}{2}, +\infty\right[$.

EXERCICES

Étudier si f est impaire ou s'il existe un nombre réel a tel que, D étant le domaine de définition de f,

$$(\forall x \in D) \quad f(a - x) = -f(x).$$

Indiquer, dans chaque cas, le domaine de définition.

6. $f(x) = \dfrac{|x| + 1}{x}$.

7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}}{x^3}$.

8. $f(x) = \cos^2 x \sin 2x$.

9. $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{1 + \sin x}$.

c) Fonction périodique.

Définition.

Une fonction f, de domaine de définition D, est périodique si et seulement s'il existe un nombre $P > 0$ tel que

$$(\forall x \in D) \quad f(x + P) = f(x).$$

On dit que P est une période de f. Nous avons aussi

$$(\forall x \in D) \quad f(x + 2P) = f[(x + P) + P] = f(x + P) = f(x)$$

donc 2 P est aussi une période de f et plus généralement on montrera par récurrence que kP ($k \in \mathbb{N}^*$) est aussi une période de f. Lorsque nous parlerons d'une période d'une fonction f, il s'agira toujours de **la plus petite période** (strictement positive).

On montrera aussi par récurrence que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(\forall x \in D) \quad f(x - kP) = f(x)$$

Finalement on peut écrire :

$$(\forall x \in D) \quad (\forall k \in \mathbb{Z}) \quad f(x + kP) = f(x).$$

Quand x_0 décrit un intervalle I_0 ($I_0 \subset D$), $x_k = x_0 + kP$ ($k \in \mathbb{Z}$) décrit un intervalle I_k ($I_k \subset D$). Des propriétés de f sur I_0, nous déduirons des propriétés de f sur I_k. Ces propriétés ont été vues dans la classe précédente (voir cours de Première). Nous les énoncerons :

si f est constante sur I_0, elle est constante sur I_k et prend la même valeur que sur I_0;

si f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I_0, elle est strictement croissante (resp. décroissante) sur I_k.

Puisque $f(x_0 + kP) = f(x_0)$, le point M_0 $(x_0, f(x_0))$ a pour image le point M_k $(x_0 + kP, f(x_0 + kP))$ par la translation de vecteur $\vec{T_k}$ de coordonnées $(kP, 0)$ (fig. 5).

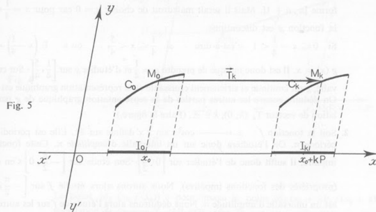


Fig. 5

Lorsque x_0 décrit I_0, M_0 décrit un ensemble C_0 et M_k décrit l'ensemble C_k déduit de C_0 par la translation de vecteur $\vec{T_k}$.

Il en résulte que lorsqu'on aura étudié f sur un intervalle d'amplitude P c'est-à-dire un intervalle de la forme $[a, a + P[$ (a nombre réel donné), on en déduira l'étude de f sur tout intervalle de la forme

$$[a + kP, a + (k + 1) P[\quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Les exemples suivants vont montrer comment on choisira a.

EXEMPLES

1. Si x est un nombre réel quelconque, il existe un entier relatif k tel que $k \leqslant x < k + 1$. Cet entier relatif s'appelle la partie entière de x que nous noterons $E(x)$.
Soit la fonction $f : x \longmapsto x - E(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
Si $k \leqslant x < k + 1$, on a $k + 1 \leqslant x + 1 < k + 2$ donc $E(x + 1) = E(x) + 1$ et

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x + 1) = x + 1 - E(x + 1) = x + 1 - E(x) - 1 = f(x)$$

donc f est périodique, de période 1. On étudiera f sur un intervalle de la forme $[a, a + 1[$. Il est commode ici de prendre $a = 0$ car si $0 \leqslant x < 1$, on a $E(x) = 0$ et $f(x) = x$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, 1[$ et sa représentation graphique est simple. On déduira les autres parties de la représentation graphique de f par translation de vecteur $\vec{T}_k$ $(k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. (Faire la figure.)

Soit la fonction $g : x \longmapsto x - E\left(x - \frac{1}{4}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Si $k \leqslant x - \frac{1}{4} < k + 1$, on a $k + 1 \leqslant x + 1 - \frac{1}{4} < k + 2$ donc

$E\left(x + 1 - \frac{1}{4}\right) = E\left(x - \frac{1}{4}\right) + 1$ et :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x + 1) = x + 1 - E\left(x + 1 - \frac{1}{4}\right)$$
$$= x + 1 - E\left(x - \frac{1}{4}\right) - 1 = g(x)$$

donc g est périodique, de période 1. On étudiera g sur un intervalle de la forme $[a, a + 1[$. Mais il serait maladroit de choisir $a = 0$ car pour $x = \frac{1}{4} \in [0, 1[$ la fonction g est discontinue.

Si $0 \leqslant x - \frac{1}{4} < 1$ c'est-à-dire si $\frac{1}{4} \leqslant x < \frac{5}{4}$, on a $E\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0$ et $g(x) = x$. Il est donc indiqué de prendre $a = \frac{1}{4}$ et d'étudier g sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right[$. Sur cet intervalle, g est continue et strictement croissante et sa représentation graphique est simple. On déduira encore les autres parties de la représentation graphique de g par translation de vecteur $\vec{T}_k$ $(k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. (Faire la figure.)

2. Soit la fonction $f : x \longmapsto \cos^2 x \sin 2x$ définie sur $\mathbb{R}$. Elle est périodique, de période π. On l'étudiera donc sur un intervalle d'*amplitude* π. Cette fonction est impaire, il suffit donc de l'étudier sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Son étude sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ s'en déduira (propriétés des fonctions impaires). Nous aurons alors étudié f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ qui est un intervalle d'amplitude π. Nous déduirons alors l'étude de f sur les autres intervalles d'amplitude π (propriétés des fonctions périodiques).

3. Soit la fonction $f : x \longmapsto \sin x - \sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$.
Nous avons

$$(1) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

donc f est périodique, de période 2π. On l'étudiera donc sur un intervalle d'*amplitude* 2π. Nous avons aussi

$$(2) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(\pi - x) = f(x)$$

la courbe représentative de f admet donc la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie, nous étudierons donc f sur un intervalle d'*amplitude* π, l'une des bornes étant $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ou $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Si nous étudions f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, nous en déduirons l'étude sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ compte tenu de (2). Nous aurons alors étudié f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ qui est un intervalle d'amplitude 2π. Nous en déduirons ensuite l'étude de f sur les autres intervalles d'amplitude 2π compte tenu de (1).

REMARQUE

Plus généralement soit une fonction f, de domaine de définition D, telle que

$$(\forall x \in D) \quad f(x + P) = f(x) + Q,$$

$P \neq 0$ et $Q \neq 0$ donnés (lorsque $Q = 0$ on a une fonction périodique).
On peut écrire

$$(\forall x \in D) \quad f(x + 2P) = f[(x + P) + P] = f(x + P) + Q = f(x) + 2Q$$

et plus généralement (raisonner par récurrence) :

$$(\forall x \in D) \quad (\forall k \in \mathbb{Z}) \quad f(x + kP) = f(x) + kQ.$$

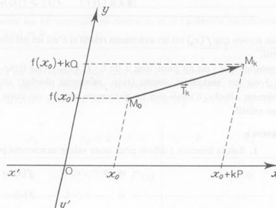


Fig. 6

Le point M_0 $(x_0, f(x_0))$ a pour image le point M_k $(x_0 + kP, f(x_0 + kP))$ par la translation de vecteur $\vec{T}_k$ (kP, kQ) (fig. 6).
On se bornera à étudier f sur un intervalle d'amplitude P. (Si f est constante ou strictement croissante ou strictement décroissante sur I_0, quand x_0 décrit I_0, $x_0 + kP$ décrit I_k, on montrera, à titre d'exercice, que f est constante ou strictement croissante ou strictement décroissante sur I_k).

EXERCICES

Réduire l'ensemble d'étude de f dans les cas suivants :

10. $f(x) = (-1)^{E(x)}\,[x - E(x)]$.

11. $f(x) = [x - E(x)]^2 + E(x)$.

12. $f(x) = \sqrt{\cos 2x - \cos x}$.

13. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos 2x}$.

14. $f(x) = \sin\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{3} + \sin\dfrac{x}{4}$.

15. $f(x) = x - 2\sin x$.

3. 3. EXTREMUMS D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE

a) Définitions. Exemples.

Définitions.

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in$ I.
On dit que f admet un **maximum relatif** $f(x_0)$ en x_0 si et seulement s'il existe un intervalle I' de centre x_0 tel que

$$(\forall x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{I}') \qquad f(x) \leqslant f(x_0).$$

On dit que f admet un **minimum relatif** $f(x_0)$ en x_0 si et seulement s'il existe un intervalle I' de centre x_0 tel que

$$(\forall x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{I}') \qquad f(x) \geqslant f(x_0).$$

Nous dirons que $f(x_0)$ est un **extremum relatif** si c'est un maximum relatif ou un minimum relatif.
Supposons que l'on ait pour tout x de I : $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$), on dit que $f(x_0)$ est un **maximum absolu** (resp. **minimum absolu**); un maximum absolu ou un minimum absolu, c'est-à-dire un **extremum absolu**, est donc un cas particulier d'extremum relatif.

EXEMPLE

1. Soit la fonction f définie pour toute valeur strictement positive de x par :

$$\text{si } 0 < x \leqslant 1 \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$
$$\text{si } x > 1 \qquad f(x) = x^2.$$

La fonction : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$ donc aussi sur $]0, 1]$. La fonction : $x \longmapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc aussi sur $]1, +\infty[$. D'où le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	

et l'on peut conclure que dans l'intervalle $\mathrm{I} =]0, +\infty[$, la fonction f présente un minimum relatif égal à $+1$ pour $x_0 = 1$. (C'est d'ailleurs le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}_+^*$).

b) Emploi de la dérivée.

Supposons f dérivable sur un intervalle I de centre x_0.
Si, par exemple, f a un maximum relatif $f(x_0)$ en x_0, il existe un intervalle I' de centre x_0 tel que

$$(\forall x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{I}') \qquad f(x) \leqslant f(x_0).$$

Soit $\mathrm{I} \cap \mathrm{I}' =]x_0 - h, x_0 + h[$,

$$\text{pour tout } x \text{ de }]x_0 - h, x_0[\qquad m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

$$\text{pour tout } x \text{ de }]x_0, x_0 + h[\qquad m(x) \leqslant 0.$$

On a donc

$$\lim_{x \to x_0 - 0} m(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0 - 0} m(x) \leqslant 0;$$

la fonction f étant dérivable en x_0, ces deux limites sont égales à $f'(x_0)$; d'où $f'(x_0) \geqslant 0$ et $f'(x_0) \leqslant 0$ donc $f'(x_0) = 0$.
On ferait le même raisonnement pour un minimum relatif en x_0, f étant toujours supposée dérivable sur un intervalle I de centre x_0. On peut donc énoncer :

Théorème 1.

Si f est dérivable sur un intervalle de centre x_0 et si f présente un extremum relatif en x_0, on a $f'(x_0) = 0$.

Réciproquement si f est dérivable sur un intervalle I de centre x_0 et si la dérivée s'annule en x_0 en **changeant de signe**, il résulte des théorèmes 2 et 3 du § 3.1 c que l'on a l'un des deux tableaux de variation suivants, sur un intervalle $]x_0 - h, x_0 + h[$ $(h < 0)$:

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

ce qui montre que f a un extremum relatif en x_0. Nous pouvons énoncer :

Théorème 2.

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle de centre x_0 et si la dérivée s'annule en x_0 en changeant de signe, la fonction f admet un extremum relatif en x_0.

EXEMPLE

2. Soit la fonction $f: x \longmapsto x^3 - 3x$ définie sur $\mathbb{R}$. Elle admet une dérivée en tout point x réel qui est $f'(x) = 3(x^2 - 1)$. On sait étudier le signe de cette dérivée d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘	-2	↗	

Cette fonction f admet donc un maximum relatif pour $x = -1$ qui est $f(-1) = 2$. Elle admet un minimum relatif pour $x = 1$ qui est $f(1) = -2$. Notons que $f(-1) = 2$ n'est pas un maximum absolu car il existe des nombres x de l'ensemble de définition de f tels que $f(x) > 2$, par exemple $f(3) = 18 > 2$. De même $f(1) = -2$ n'est pas un minimum absolu car, par exemple, $f(-3) = -18 < -2$.

REMARQUES

1. Le théorème 2 ci-dessus nous donne une **condition suffisante** pour que f admette un extremum en x_0 mais cette condition n'est pas nécessaire. En effet, dans l'exemple 1 précédent, la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \qquad f(x) = \frac{1}{x}$$
$$\text{si} \quad x > 1 \qquad f(x) = x^2$$

présente un minimum en $x_0 = 1$ mais f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$ car, en ce point elle admet une dérivée à gauche qui est -1 et une dérivée à droite, qui est $+2$. Le point de coordonnées (1, 1) est un *point anguleux* pour la courbe représentative de f.

2. D'autre part, dans le théorème 2, si f' existe et si $f'(x_0) = 0$ il est essentiel que la dérivée s'annule en x_0 en changeant de signe pour affirmer l'existence d'un extremum en x_0. Par exemple, la fonction $f: x \longmapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$, est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a bien $f'(0) = 0$ mais pour tout $x \neq 0$, $f'(x) > 0$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle ne présente pas d'extremum pour $x = 0$ bien que $f'(0) = 0$.

3. 4. POINT D'INFLEXION

a) Définition. Exemples.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{si} \quad x < 0 \qquad f(x) = -2x^2$$
$$\text{si} \quad x \geqslant 0 \qquad f(x) = x^2.$$

Nous avons :

$$\text{si} \quad x < 0 \qquad f'(x) = -4x > 0$$
$$\text{si} \quad x > 0 \qquad f'(x) = 2x > 0$$

d'où le tableau de variation de f dans lequel nous avons indiqué les limites de f quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

d'où la courbe représentative Γ (fig. 7).

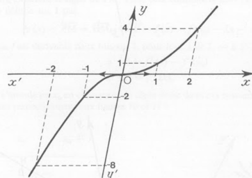


Fig. 7

Pour $x = 0$, la fonction : $x \longmapsto x^2$ a une dérivée à droite nulle, la fonction : $x \longmapsto -2x^2$ a une dérivée à gauche nulle, donc la fonction f a une dérivée nulle pour $x = 0$ et la courbe Γ admet $x'x$ comme tangente en O.

Nous remarquons que, pour $x < 0$ les points de Γ appartiennent au demi-plan défini par $y < 0$ tandis que pour $x > 0$, les points de Γ appartiennent au demi-plan défini par $y > 0$. La courbe Γ « traverse » donc sa tangente en O. On dit que O est un **point d'inflexion** pour Γ.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + x$.
Cette fonction est *impaire* donc il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$:

$$f'(x) = -3x^2 + 1$$

et
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$$

d'où le tableau de variation

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\infty$

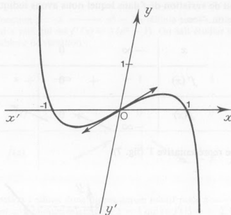


Fig. 8

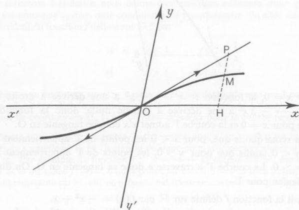


Fig. 9

La fonction étant impaire, la courbe représentative Γ (fig. 8) admet l'origine O comme centre de symétrie. Puisque $f'(0) = 1$, la courbe Γ admet une tangente T en O de coefficient directeur 1. Cette tangente T est donc la droite d'équation $y = x$. Précisons la position de Γ par rapport à T. Soit M et P les points respectivement sur Γ et sur T de même abscisse x (fig. 9), ils ont même projection H sur $x'x$ parallèlement à $y'y$:

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = (-x^3 + x) - x = -x^3$$

si $x > 0$, on a $\overline{PM} < 0$ et M est « au-dessous » de la droite T,

si $x < 0$, on a $\overline{PM} > 0$ et M est « au-dessus » de la droite T.

Donc au point O la courbe Γ « traverse » sa tangente : O est un point d'inflexion de Γ.

b) Emploi de la dérivée seconde.

Sur l'exemple 2 précédent, $f''(x) = -6x$ et cette dérivée seconde s'annule en $x_0 = 0$ en changeant de signe.

Plus généralement, supposons une fonction f dérivable deux fois sur

$$I =]x_0 - h, x_0 + h[\quad (h > 0),$$

la dérivée seconde s'annulant en x_0 en **changeant de signe :** La courbe représentative Γ de la fonction f admet une tangente T en $M_0(x_0, f(x_0))$ non parallèle à $y'y$ et d'équation :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

Comme dans l'exercice 2 précédent, soit M et P les points respectivement sur Γ et sur T de même abscisse x ($x \in I$), ils ont même projection H sur $x'x$ parallèlement à $y'y$ (fig. 10). Étudions le signe de $\overline{PM}$. Pour cela étudions le sens de variation de la fonction φ définie sur I par

$$\varphi(x) = \overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0).$$

Puisque f est dérivable deux fois sur I, pour tout x de I, on a :

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$
$$\varphi''(x) = f''(x),$$

$f''(x)$ s'annule en x_0 en changeant de signe donc deux cas peuvent se présenter correspondant respectivement aux figures 10 et 11 :

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$\varphi''(x)$	+	0	−
$\varphi'(x)$	↗	0	↘
$\overline{PM} = \varphi(x)$	↘ + ↘	0	− ↘

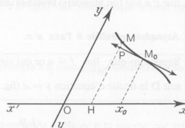


Fig. 10

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$\varphi''(x)$	−	0	+
$\varphi'(x)$	↘ + ↘	0	+ ↗
$\overline{PM} = \varphi(x)$	↗ − ↗	0	+ ↗

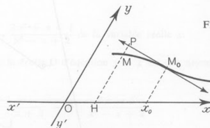


Fig. 11

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème.

Si f est une fonction dérivable deux fois sur un intervalle de centre x_0 et si la dérivée seconde s'annule en x_0 en changeant de signe, la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion d'abscisse x_0.

Remarquons que ce théorème ne donne qu'une **condition suffisante** d'existence d'un point d'inflexion. Elle est vérifiée dans l'exemple 2 précédent, mais dans l'exemple 1 on a :

$$\text{si} \quad x < 0 \qquad f'(x) = -4x$$
$$\text{si} \quad x \geqslant 0 \qquad f'(x) = 2x$$

donc la fonction f' a, au point $x_0 = 0$, une dérivée à gauche -4 et une dérivée à droite 2, donc f'' n'est pas définie au point $x_0 = 0$: l'origine est pourtant un point d'inflexion.

EXERCICE

Étudier les points d'inflexion éventuels des courbes représentatives des fonctions f, g, h définies par

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^4, \quad h(x) = x^5.$$

Généraliser.

3. 5. ASYMPTOTES

Le plan (affine) étant rapporté à un repère quelconque $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit Γ la représentation graphique d'une fonction numérique f de la variable réelle x. Si l'un des nombres au moins $|x|$ ou $|f(x)|$ peut prendre des valeurs aussi « grandes » que l'on veut, on dit que Γ a une (ou plusieurs) **branches infinies.** Précisons ces notions.

a) Asymptote parallèle à l'axe $x'x$.

Supposons que $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f = a$ ce qui signifie que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f = a$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f = a$,

soit D la droite d'équation $y = a$ (fig. 12).

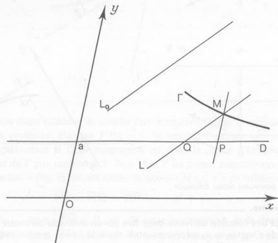


Fig. 12

Comme dans l'étude d'un point d'inflexion, soit M et P les points respectivement sur Γ et sur D de même abscisse x, étudions $\overline{PM}$.

$$\overline{PM} = f(x) - a$$

donc

$$\lim_{|x| \to +\infty} \overline{PM} = 0.$$

Soit L_0 une droite fixe non parallèle à D, L la droite passant par M et parallèle à L_0, elle coupe D en Q. Si $\vec{k}$ est un vecteur directeur de L_0, $\overrightarrow{QM} = \overline{QM}\,\vec{k}$. Le bi-point (Q, M) est la projection du bi-point (P, M) sur la droite L parallèlement à D. Si $\overline{PM} \neq 0$, le rapport $\dfrac{\overline{QM}}{\overline{PM}}$ est constant (propriété des projections). Posons $\dfrac{\overline{QM}}{\overline{PM}} = \lambda$ ($\lambda \neq 0$ fixe), on a donc $\overline{QM} = \lambda\overline{PM}$, ce qui est encore vrai si $\overline{PM} = 0$. Donc pour tout point M de Γ :

$$\overline{QM} = \lambda\,\overline{PM} = \lambda\,[f(x) - a]$$

et

$$\lim_{|x| \to +\infty} \overline{QM} = 0.$$

Ce résultat est indépendant de λ donc de $\vec{k}$, donc de la direction de L_0, *non parallèle à* D; il ne dépend que de la fonction f. En particulier dans le plan affine euclidien, en prenant L_0 perpendiculaire à D, la distance de M à D tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition.

La droite d'équation $y = a$ est une asymptote à la courbe représentant f si et seulement si $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f = a$.

Notons que le signe de $\overline{PM} = f(x) - a$ permet de « placer » la courbe par rapport à son asymptote (lorsque ce signe est constant sur une demi-droite $[x_0, +\infty[$ ou $]-\infty, x_0]$).

EXEMPLES

1. Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 2}$ de la variable réelle x.

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} f = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{2x^2}{x^2} = 2$ donc la droite D d'équation $y = 2$ est une asymptote à la courbe représentant f.

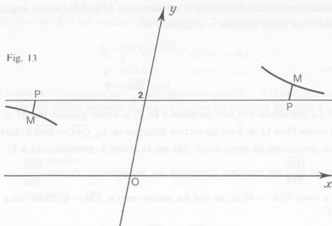
$$\overline{PM} = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 2} - 2 = \frac{3x - 5}{x^2 - x + 2}$$

le trinôme $x^2 - x + 2$ n'a pas de racines donc il est toujours du signe du coefficient de x^2 c'est-à-dire qu'il est strictement positif quel que soit x et le signe de $\overline{PM}$ est celui de $3x - 5$:

si $x > \dfrac{5}{3}$, $\overline{PM} > 0$ courbe « au-dessus » de l'asymptote (fig. 13)

si $x < \dfrac{5}{3}$, $\overline{PM} < 0$ courbe « au-dessous » de l'asymptote.

Fig. 13



2. Soit la fonction $f : \quad x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

Pour tout $x \neq 0$, $\quad \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{|x|}$

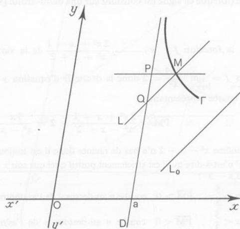
et $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{1}{|x|} = 0 \quad$ donc $\quad \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$,

l'axe $x'x$ est une asymptote à la courbe représentant f, mais $\overline{PM} = \dfrac{\sin x}{x}$ n'a pas un signe constant sur une demi-droite de la forme $\quad [x_0, +\infty[\quad$ ou $\quad]-\infty, x_0]$.

b) Asymptote parallèle à l'axe $y'y$.

Supposons que l'on ait $\quad \lim\limits_{x\to a+0} f = +\infty$. Soit D la droite d'équation $x = a$, considérons les points $\quad M(x, f(x)) \quad$ et $\quad P \; (a, f(x)) \quad$ (fig. 14)

Fig. 14



$$\overline{PM} = x - a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a+0} \overline{PM} = 0.$$

Si L_0 est une droite fixe non parallèle à D, de vecteur directeur $\vec{k}$, soit L la droite passant par M et parallèle à L_0, elle coupe D en Q. Comme précédemment $\overline{QM} = \lambda\overline{PM}$ ($\lambda \neq 0$ fixe) pour tout point M de la courbe Γ, et $\quad \lim\limits_{x\to a+0} \quad \overline{QM} = 0$. Donc quelle que soit la direction de L_0 non parallèle à D, nous avons simultanément

$$\lim_{x\to a+0} \overline{QM} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a+0} f = +\infty$$

ce résultat ne dépend que de la fonction f. On fera une étude analogue si $\lim\limits_{x\to a+0} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a-0} f = +\infty \quad$ ou $\lim\limits_{x\to a-0} f = -\infty$.

Définition.

La droite d'équation $x = a$ est une asymptote à la courbe représentant f si et seulement si $\lim\limits_{x\to a+0} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a+0} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a-0} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a-0} f = -\infty$

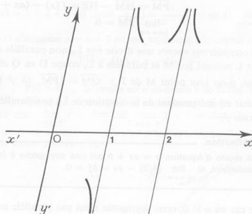
EXEMPLE

3. Soit la fonction $f : \quad x \longmapsto \dfrac{2x + 3}{(x-1)(x-2)^2}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

nous avons $\quad 2x + 3 > 0 \quad$ pour $\quad x > -\dfrac{3}{2}$

$x - 1 > 0 \quad$ pour $\quad x > 1$

Fig. 15



et
$$\lim_{x\to 1+0} f = +\infty \;, \quad \lim_{x\to 1-0} f = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2+0} f = +\infty \;, \quad \lim_{x\to 2+0} f = +\infty \qquad \text{(fig. 15)}$$

les droites d'équations $\quad x = 1 \quad$ et $\quad x = 2 \quad$ sont des asymptotes à la courbe représentant f.

(On notera que $\quad \lim\limits_{|x|\to+\infty} f = 0$ donc l'axe $x'x$ est aussi une asymptote, mais nous ne nous sommes préoccupés que des asymptotes parallèles à $y'y$.)

c) **Asymptote d'équation $y = ax + b$.**

Soit D la droite d'équation $y = ax + b$. Quels que soient les coefficients a et b, la droite D n'est pas parallèle à $y'y$, tandis que D est parallèle à $x'x$ si et seulement si $a = 0$.
Supposons que $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0$ ce qui signifie que :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax - b] = 0.$$

Soit Γ la courbe représentant f, M et P les points respectivement sur Γ et sur D de même abscisse x, ils se projettent en H sur $x'x$ parallèlement à $y'y$ (fig. 16).

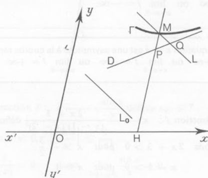


Fig. 16

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP} = f(x) - (ax + b)$$

donc $$\lim_{|x| \to +\infty} \overline{PM} = 0.$$

Si nous considérons encore une droite fixe L_0 non parallèle à D, de vecteur directeur $\vec{k}$, la droite L passant par M et parallèle à L_0 coupe D en Q et nous avons, comme précédemment, pour tout point M de Γ : $\overline{QM} = \lambda \overline{PM}$ ($\lambda \neq 0$ fixe) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \overline{QM} = 0$.

Ce résultat est indépendant de la direction de L_0 non parallèle à D; il ne dépend que de la fonction f.

Définition.

La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe représentant f si et seulement si $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0$.

Dans le cas où $a \neq 0$, cette asymptote n'est pas parallèle aux axes de coordonnées, on dit que c'est une **asymptote oblique**.

Notons que le signe de $\overline{PM} = f(x) - ax - b$ permet de « placer » la courbe par rapport à son asymptote (lorsque ce signe est constant sur une demi-droite $[x_0, +\infty[$ ou $]-\infty, x_0]$).

Recherche de cette asymptote.

Pour avoir

(1) $$\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

il faut et il suffit que l'on puisse trouver une fonction φ définie sur une demi-droite $[x_0, +\infty[$ ou $]-\infty, x_0]$ et telle que pour tout x de cette demi-droite :

(2) $$f(x) = ax + b + \varphi(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{|x| \to +\infty} \varphi = 0.$$

Remarquons qu'une *condition nécessaire* d'avoir (1) ou (2) est :

si $a \neq 0$ f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$
si $a = 0$ f a pour limite un nombre b quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

EXEMPLES

4. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty.$$

Cherchons à mettre $f(x)$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$ qui est de la forme (2). Pour cela posons $x - 1 = X$, par suite $x = 1 + X$.
Pour tout $x \neq 1$ c'est-à-dire pour tout $X \neq 0$:

$$f(x) = \frac{(1 + X)^2 + X}{X} = \frac{X^2 + 3X + 1}{X} = X + 3 + \frac{1}{X}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x - 1}.$$

On a bien, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = x + 2 + \varphi(x) \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = \frac{1}{x - 1} \quad \text{et on a} \quad \lim_{|x| \to +\infty} \varphi = 0.$$

La droite D d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe représentant f.

$$\overline{PM} = f(x) - x - 2 = \frac{1}{x - 1}$$

si $x > 1$, $\overline{PM} > 0$, la courbe est « au-dessus » de D (fig. 17).
si $x < 1$, $\overline{PM} < 0$, la courbe est « au-dessous » de D.
(On notera que $\lim\limits_{x \to 1+0} f = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1-0} f = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est aussi une asymptote; on ne s'est préoccupé, ici, que des asymptotes d'équations de la forme $y = ax + b$).

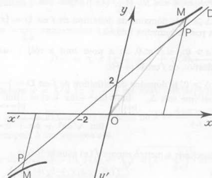


Fig. 17

5. Soit $f: x \longmapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$. On a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Comme précédemment, posons $x - 1 = X$, par suite $x = 1 + X$.
Pour tout $x \neq 1$ c'est-à-dire pour tout $X \neq 0$:

$$f(x) = \frac{(1+X)^3}{X^2} = \frac{X^3 + 3X^2 + 3X + 1}{X^2} = X + 3 + \frac{3}{X} + \frac{2}{X^2}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

qui est de la forme :

(2) $$f(x) = x + 2 + \varphi(x),$$

avec $\varphi(x) = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$ et on a bien $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \varphi = 0$.

La droite D d'équation $y = x + 2$ est donc une asymptote à la courbe représentant f.

$$\overline{PM} = f(x) - x - 2 = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\overline{PM} = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

si $x > \frac{2}{3}$ et $x \neq 1$, $\overline{PM} > 0$ courbe « au-dessus » de l'asymptote (fig. 17)

si $x < \frac{2}{3}$, $\quad$ PM < 0 courbe « au-dessous » de l'asymptote.

(On notera que $\lim\limits_{x\to1} f = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est aussi une asymptote.)

6. Soit $f: x \longmapsto \sqrt{ax^2 + bx + c}$ $(a \neq 0)$ une fonction de la variable réelle x. Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Si $\Delta \geqslant 0$, ce trinôme admet deux racines réelles (distinctes ou non) x' et x'', supposons $x' \leqslant x''$.

Si $a < 0$, si $\Delta < 0$, on a pour tout x réel :
$ax^2 + bx + c < 0$ et $f(x)$ n'existe pas.

Si $\Delta \geqslant 0$, le domaine de définition de f est $D = [x', x'']$ et la courbe représentative n'a pas de branches infinies.

Si $a > 0$, si $\Delta < 0$, on a pour tout x réel : $ax^2 + bx + c > 0$, le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}$.

Si $\Delta \geqslant 0$, le domaine de définition de f est $D =]-\infty, x'] \cup [x'', +\infty[$.

Quel que soit Δ, $\lim\limits_{|x|\to+\infty} (ax^2 + bx + c) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} (ax^2) = +\infty$

$$\lim_{|x|\to+\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = +\infty.$$

Cherchons à mettre encore $f(x)$ sous la forme :

(2) $$f(x) = a_1 x + b_1 + \varphi(x), \quad \text{avec} \lim_{|x|\to+\infty} \varphi = 0.$$

En mettant le trinôme $ax^2 + bx + c$ sous sa forme canonique, on peut écrire pour tout x de D :

$$f(x) = \sqrt{a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)}$$

$$f(x) = \sqrt{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]}$$

$$f(x) = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k}, \quad \text{avec } k = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Si $k \neq 0$ c'est-à-dire si $\Delta \neq 0$ on peut écrire pour tout x de D :

$$f(x) = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} + \varphi(x),$$

en posant

$$\varphi(x) = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k} - \sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}$$

$$\varphi(x) = \frac{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k - a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{\sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k} + \sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}}$$

$$= \frac{k}{\sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k} + \sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}}.$$

On a

$$\lim_{|x|\to+\infty} \varphi = 0$$

et pour tout x de D :

$$f(x) = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right| + \varphi(x).$$

Donc pour tout $x \leqslant -\dfrac{b}{2a}$, x appartenant à D :

$$f(x) = -\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \varphi(x),$$

la droite d'équation $y = -\sqrt{a}\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)$ est une asymptote à la courbe.

Pour tout $x \geqslant -\dfrac{b}{2a}$, appartenant à D :

$$f(x) = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \varphi(x),$$

la droite d'équation $y = \sqrt{a}\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)$ est aussi une asymptote à la courbe.

Notons que le signe de $\overline{PM} = \varphi(x)$ est celui de $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ et permet de placer la courbe par rapport à ses asymptotes.

Si $\Delta = 0$ (avec toujours $a > 0$), $f(x) = \sqrt{a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2}$, la courbe représentative est la réunion des demi-droites définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} y = -\sqrt{a}\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) \\ x \leqslant -\dfrac{b}{2a} \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{a}\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) \\ x \geqslant -\dfrac{b}{2a}. \end{array}\right.$$

REMARQUE

Si $a = 0$, $f(x) = \sqrt{bx + c}$. Pour tout x et tout y réels :

$$y = \sqrt{bx + c} \iff \left\{\begin{array}{l} y^2 = bx + c \quad (3) \\ y \geqslant 0 \end{array}\right.$$

l'équation (3) est de la forme $x = Ay^2 + By + C$ donc la représentation graphique de f est un arc de parabole (si $b \neq 0$) qui n'a pas d'asymptote (voir plus loin § 3. 5 d).

Mais il n'est pas toujours possible de procéder comme dans les exemples précédents. Si l'on a

(1) $$\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - ax - b] = 0,$$

on a pour tout x d'une demi-droite $[x_0, +\infty[$ ou $]-\infty, x_0]$:

(2) $$f(x) = ax + b + \varphi(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{|x| \to +\infty} \varphi = 0$$

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{\varphi(x)}{x} \quad \text{et} \quad f(x) - ax = b + \varphi(x)$$

d'où

$$(3) \quad \lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad (4) \quad \lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - ax] = b.$$

Réciproquement si l'on a (3) et (4), on a bien (1) et la droite d'équation $y = ax + b$ est bien une asymptote à la courbe.

EXEMPLE

7. Soit $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$. Le domaine de définition est

$$D =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[.$$

On a

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^3}{x-1} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = +\infty.$$

Pour tout x de D :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Pour tout $x > 1$, $|x| = x$ et $\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

d'où $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ donc $a = 1$.

Pour tout $x > 1$,

$$f(x) - ax = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x = \frac{\dfrac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} + x} = \frac{1}{x-1} \frac{x^2}{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} + x}$$

$$f(x) - ax = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 - x^3} + x^2 - x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} + 1 - \dfrac{1}{x}}$$

d'où $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \frac{1}{2}$ donc $b = \dfrac{1}{2}$.

La droite D_1 d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote.

Position de la courbe par rapport à D_1 :

$$\overline{PM} = f(x) - ax - b = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} + 1 - \dfrac{1}{x}} - \frac{1}{2}$$

pour tout $x > 1$, on a : $0 < 1 - \dfrac{1}{x} < 1$

$$0 < \sqrt{1 - \frac{1}{x}} < 1$$

donc $$0 < \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x} < 2$$

et $$\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} + 1 - \dfrac{1}{x}} > \frac{1}{2}$$

donc $\overline{PM} > 0$, la courbe est au-dessus de D_1 (fig. 18).

Pour tout $x < 0$, $|x| = -x$ et $\dfrac{f(x)}{x} = -\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

d'où $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ donc $a = -1$.

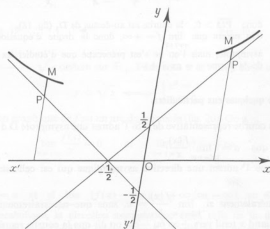


Fig. 18

Pour tout $x < 0$,

$$f(x) - ax = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x = \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x} = \frac{1}{x-1}\,\frac{x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x}$$

$$f(x) - ax = -\frac{x^2}{\sqrt{x^4 - x^3 + x^2 - x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x}}$$

d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = -\frac{1}{2}$ donc $b = -\frac{1}{2}$.

La droite D_2 d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote.

Position de la courbe par rapport à D_2 :

$$\overline{PM} = f(x) - ax - b = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x}} + \frac{1}{2}$$

pour tout $x < 0$, on a $1 - \frac{1}{x} > 1$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x}} > 1$$

donc
$$\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x} > 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x}} < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x}} > -\frac{1}{2}$$

donc $\overline{PM} > 0$, la courbe est au-dessus de D_2 (fig. 18).
(On notera que $\lim\limits_{x \to 1+0} f = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 1$ est aussi une asymptote, mais l'on ne s'est préoccupé que d'étudier les asymptotes d'équations de la forme $y = ax + b$.)

d) Étude de quelques cas particuliers.

Soit Γ la courbe représentative de f. Si Γ admet une asymptote D d'équation $y = ax + b$, on a vu que $a = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
On dit que Γ admet une **direction asymptotique** qui est celle de la droite d'équation $y = ax$.

Plus généralement si $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, sans que nécessairement $f(x) - ax$ ait une limite quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que la courbe représentative Γ de f admet une direction asymptotique qui est celle de la droite d'équation $y = ax$.

Si $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que Γ admet une direction asymptotique qui est celle de Oy.
Examinons quelques cas particuliers.

1. Soit $f: x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$, on sait que sa représentation graphique est une parabole (fig. 19). On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

plus généralement :

Si $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que Γ admet une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de Oy.

Il en est ainsi pour la courbe représentative de $f: x \longmapsto x^r$ (r rationnel > 1) car

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^r}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^{r-1} = +\infty.$$

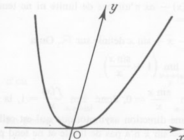


Fig. 19

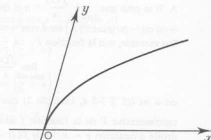


Fig. 20

2. Soit $f: x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout x et tout y réels on a

$$y = \sqrt{x} \iff \begin{cases} y^2 = x \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

la représentation graphique de f est un arc de parabole (fig. 20). On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

plus généralement :

Si $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et si $\lim\limits_{|x| \to +\infty} [f(x) - ax] = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que Γ admet une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de la droite d'équation $y = ax$. (Si $a = 0$, cette direction asymptotique est celle de la droite d'équation $y = 0$ c'est-à-dire la direction de Ox).

Exemple.

Soit f : $x \longmapsto x + \sqrt{x+1}$ définie pour $x \geqslant -1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\sqrt{x+1}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$$

donc la représentation graphique Γ de f admet une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de la droite d'équation $y = x$. Pour $x > -1$, on a

$$\overline{PM} = x + \sqrt{x+1} - x = \sqrt{x+1} > 0 \quad \text{(fig. 21).}$$

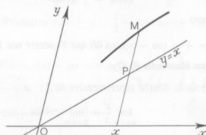


Fig. 21

3. Il se peut que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et que $f(x) - ax$ n'ait pas de limite ni ne tende vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

Par exemple, soit la fonction f : $x \longmapsto x + \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$. On a

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x|\to+\infty}\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)$$

on a vu (cf. § 3-5 a, exemple 2) que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, la courbe représentative Γ de la fonction f admet une direction asymptotique qui est celle de la droite d'équation $y = x$. Mais $f(x) - ax = \sin x$ n'a pas de limite et ne tend pas vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

EXERCICES

Étudier les branches infinies (directions asymptotiques, asymptotes, placer éventuellement les branches infinies par rapport aux asymptotes) des courbes représentatives des fonctions f définies par :

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$. **2.** $f(x) = \dfrac{x^3+1}{(x-2)^2}$.

3. $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+1}{x(x-1)^2}$. **4.** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-3x+2}$.

5. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-2}$. **6.** $f(x) = \dfrac{\cos 2x + 1}{2\cos x - 1}$.

7. $f(x) = \dfrac{3\sin x + 2}{2\sin^2 x - 7\sin x + 3}$. **8.** $f(x) = \sqrt{4x^2 - 6x + 2}$.

9. $f(x) = 5x + 3\sqrt{x^2-1}$. **10.** $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

11. $f(x) = x + 1 + \sqrt[3]{x}$.

a) On voit, tout d'abord, si l'on peut **simplifier** $f(x)$ ou se ramener à une **fonction plus simple** par un changement de repère.

Soit, par exemple, la fonction de la variable rélle f : $x \longmapsto \sqrt{4x^2 - 8x + 4}$.

Pour tout x du domaine de définition de f, on peut simplifier $f(x)$:

$$f(x) = \sqrt{4(x^2 - 2x + 1)} = 2\sqrt{(x-1)^2},$$

pour tout x réel, on peut écrire :

$$f(x) = 2\,|x - 1|$$

donc f est définie pour tout x réel et sa représentation graphique est la réunion des deux demi-droites fermées définies par :

$$\begin{cases} y = 2(x-1) \\ x \geqslant 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2(x-1) \\ x \leqslant 1 \end{cases}$$

Soit la fonction de la variable réelle f : $x \longmapsto y = \sqrt{3}\cos x - \sin x + 1$. Nous savons transformer une expression de la forme $a\cos x + b\sin x$. On peut écrire pour tout x réel :

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\cos x - \sin x &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x - \sin\frac{\pi}{6}\sin x\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \end{aligned}$$

d'où $$y = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + 1$$

En posant $$\begin{cases} x + \dfrac{\pi}{6} = X \\ y - 1 = Y \end{cases}$$

ce qui revient à faire un changement de repère, on est ramené à étudier la fonction plus simple : $X \longmapsto Y = 2\cos X$.

EXERCICES

Simplifier $f(x)$ ou se ramener à une fonction plus simple par changement de repère, dans les cas suivants :

1. $f(x) = 4\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 2\sin^2 x$.

2. $f(x) = (x-1)^3 + x - 1$.

3. $f(x) = (x + \sqrt{2} + \sqrt{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} - \sqrt{3})$.

b) On détermine le **domaine de définition D** de la fonction f, on cherchera pour quelles valeurs de x la fonction est **continue** et on **réduira le domaine d'étude** de f en examinant si f est paire, impaire, périodique ou, en particulier pour les fonctions trigonométriques, si pour tout x de D on a

$$f(a-x) = f(x) \quad \text{ou} \quad f(a-x) = -f(x) \quad \text{ou} \quad f(x+P) = f(x) + Q,$$

a, P, Q étant des nombres réels déterminés (cf. § 3.2).

c) On étudie le **sens de variation** de f avec ou sans l'aide de la dérivée.

d) On indique le sens de variation de f dans un **tableau de variation** que l'on complète en indiquant les limites ou les valeurs prises, si elles existent, par f aux bornes des intervalles figurant dans le tableau de variation.

e) On construit la **représentation graphique** Γ de f en indiquant les points et tangentes remarquables, les asymptotes, les éléments de symétrie.
Nous allons donner quelques exemples d'étude complète d'une fonction numérique d'une variable réelle.

Exemple 1.

Soit $f: \ x \longrightarrow \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$. Elle est définie et continue pour tout $x \neq 1$ c'est-à-dire pour tout x de $D =]-\infty\,,1[\cup]1\,,+\infty[$.
L'étude des branches infinies (cf. § 3.5 c, exemple 5) nous a conduit à mettre $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

d'où pour tout $x \neq 1$:

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

d'où le sens de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$

nous avons complété le tableau de variation par les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = +\infty$$

nous avons montré (cf. § 3.5 c, exemple 5) que la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe et placé la courbe par rapport à cette asymptote. Une autre asymptote est la droite d'équation $x = 1$.
La courbe traverse la tangente $x'x$ en O. Donc O est un *point d'inflexion* (fig. 22).

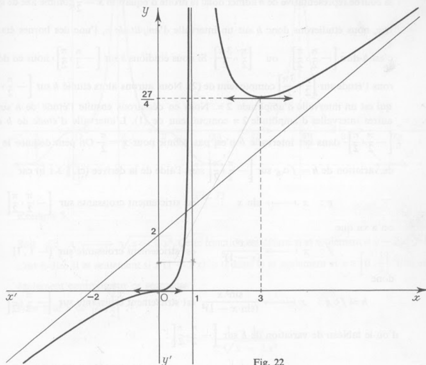


Fig. 22

Exemple 2.

Soit $h: \ x \longmapsto \dfrac{\sin^3 x}{(\sin x - 1)^2}$. Elle est définie et continue pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Désignons par E l'ensemble des nombres de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\,2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
Le domaine de définition de la fonction h est $D_1 = \mathbb{R} - E$. On peut rattacher l'étude de h à l'étude de la fonction f de l'exemple 1. En considérant

$$g: \ x \longmapsto \sin x \qquad \text{définie sur } \mathbb{R}$$

$$f: \ x \longmapsto \frac{x^3}{(x-1)^2} \qquad \text{définie sur } D = \mathbb{R} - \{1\}$$

d'où $\qquad h = f \circ g: \ x \longmapsto \dfrac{\sin^3 x}{(\sin x - 1)^2} \qquad$ définie sur $D_1 = \mathbb{R} - E$.

Nous avons par ailleurs :

(1) $\qquad (\forall x \in D_1) \qquad h(x + 2\pi) = h(x)$

donc h est périodique, de période 2π. On l'étudiera donc sur un intervalle d'*amplitude* 2π.
Nous avons aussi

(2) $\qquad (\forall x \in D_1) \qquad h(\pi - x) = h(x)$

la courbe représentative de h admet donc la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie, nous étudierons donc h sur un intervalle d'*amplitude* π, l'une des bornes étant $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ou $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Si nous étudions h sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, nous en déduirons l'étude sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ compte tenu de (2). Nous aurons alors étudié h sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ qui est un intervalle d'amplitude 2π. Nous en déduirons ensuite l'étude de h sur les autres intervalles d'amplitude 2π compte tenu de (1). L'intervalle d'*étude* de h étant $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dans cet intervalle h n'est pas définie pour $x = \frac{\pi}{2}$. On peut déduire le sens de variation de $h = f \circ g$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sans l'aide de la dérivée (cf. § 3.1 b) car

$$g: \quad x \longmapsto \sin x \qquad \text{est strictement croissante sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

on a vu que

$$f: \quad x \longmapsto \frac{x^3}{(x-1)^2} \qquad \text{est strictement croissante sur } [-1, 1[$$

donc

$$h = f \circ g: \quad x \longmapsto \frac{\sin^3 x}{(\sin x - 1)^2} \text{ est strictement croissante sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

d'où le tableau de variation de h sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$ ‖

On a complété le tableau de variation par la limite suivante

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\sin^3 x}{(\sin x - 1)^2} = +\infty.$$

La dérivée nous sera, néanmoins, utile pour les tangentes remarquables. Pour tout x de D_1 :

$$h'(x) = f'[g(x)] \times g'(x)$$

$$h'(x) = \frac{\sin^2 x\,(\sin x - 3)}{(\sin x - 1)^3} \times \cos x$$

elle n'est nulle que pour $x = k\pi$ et pour $x = -\frac{\pi}{2} + k\,2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. La courbe (fig. 23) traverse la tangente $x'x$ en O. Donc O est un *point d'inflexion*, ainsi que tous les points de $x'x$ d'abscisse $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

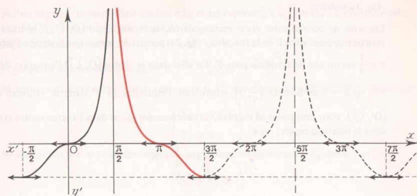


Fig. 23

Exemple 3.

Soit $f: \; x \longmapsto \sqrt{x - 2x^2}$. Cette fonction est définie si et seulement si $x - 2x^2 \geqslant 0$ c'est-à-dire si et seulement si $x(1 - 2x) \geqslant 0$ donc si et seulement si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Elle est également continue sur ce segment.

Pour tout x de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$:

$$f'(x) = \frac{1 - 4x}{2\sqrt{x - 2x^2}}$$

d'où le tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	↘	0

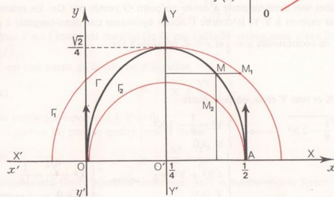


Fig. 24

Axe de symétrie

Les axes de coordonnées étant rectangulaires, le repère étant $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le tracé de la courbe représentative Γ de la fonction f (fig. 24) permet de penser que la droite d'équation $x = \frac{1}{4}$ est un axe de symétrie pour Γ. En effet dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'équation de Γ est $y = \sqrt{x - 2x^2}$. Soit $O'\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, cherchons l'équation de Γ dans le nouveau repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout point M du plan, de coordonnées (x, y) dans l'ancien repère et (X, Y) dans le nouveau repère, on a

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} + X \\ y = Y \end{cases}$$

pour que M appartienne à Γ il faut et il suffit que

$$Y = \sqrt{\frac{1}{4} + X - 2\left(\frac{1}{4} + X\right)^2}$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{8} - 2X^2}$$

c'est l'équation de Γ dans le nouveau repère. La fonction : $X \longmapsto \sqrt{\frac{1}{8} - 2X^2}$ définie sur $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ est paire donc Y'Y est bien un axe de symétrie pour Γ.

Demi-tangentes remarquables.

Soit M $(x, f(x))$ distinct de O. Le coefficient directeur de la demi-droite [O, M) est :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x - 2x^2}}{x} = \sqrt{\frac{x - 2x^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{x} - 2}$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

donc Γ admet une demi-tangente à droite au point O portée par Oy. En raison de la symétrie par rapport à Y'Y, la courbe Γ admet également une demi-tangente à gauche au point A de coordonnées $x = \frac{1}{2}$ et $y = 0$, parallèle à Oy.

Remarque

Pour tout X et tout Y réels, on peut écrire :

$$Y = \sqrt{\frac{1}{8} - 2X^2} \iff \begin{cases} Y^2 = \frac{1}{8} - 2X^2 \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2X^2 + Y^2 = \frac{1}{8} \\ Y \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} X^2 + \frac{Y^2}{2} = \frac{1}{16} \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$$

Si l'on suppose le plan affine *euclidien* E_2 et les repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O', \vec{i}, \vec{j})$ *orthonormés*, soit M (X, Y) un point quelconque de E_2,

M_1 le point de coordonnées $X_1 = X\sqrt{2}$, $Y_1 = Y$

M_2 le point de coordonnées $X_2 = X$, $Y_2 = \frac{Y\sqrt{2}}{2}$

M appartient à la courbe Γ si et seulement si M_1 appartient au demi-cercle Γ_1 défini par

$$\begin{cases} X_1^2 + Y_1^2 = \frac{1}{8} \\ Y_1 \geqslant 0 \end{cases},$$

M appartient à Γ si et seulement si M_2 appartient au demi-cercle Γ_2 défini par

$$\begin{cases} X_2^2 + Y_2^2 = \frac{1}{16} \\ Y_2 \geqslant 0 \end{cases}.$$

L'application de E_2 dans E_2 telle que l'image d'un point M_1 (X_1, Y_1) quelconque de E_2 soit le point M (X, Y) de E_2 tel que

$$\begin{cases} X = kX_1 \\ Y = Y_1 \end{cases} \quad (k \text{ nombre réel donné} \neq 0)$$

s'appelle une **affinité orthogonale** d'axe Y'Y et de rapport k. Ici on a

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2} X_1 \\ Y = Y_1 \end{cases}$$

donc Γ est l'image du demi-cercle Γ_1 par l'affinité orthogonale d'axe Y'Y et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

De même, l'application de E_2 dans E_2 telle que l'image d'un point M_2 (X_2, Y_2) quelconque de E_2 soit le point M (X, Y) de E_2 tel que

$$\begin{cases} X = X_2 \\ Y = kY_2 \end{cases} \quad (k \text{ nombre réel donné} \neq 0)$$

s'appelle une affinité orthogonale d'axe X'X et de rapport k. Ici on a

$$\begin{cases} X = X_2 \\ Y = \sqrt{2}\, Y_2 \end{cases}$$

donc Γ est l'image du demi-cercle Γ_2 par l'affinité orthogonale d'axe X'X et de rapport $\sqrt{2}$.

Γ est une partie de la courbe d'équation

(1) $$X + \frac{Y^2}{2} = \frac{1}{16}$$

(la partie correspondant à $Y \geqslant 0$).

L'équation (1) peut se mettre sous la forme

(2) $$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

toute courbe dont l'équation cartésienne peut se mettre sous la forme (2) s'appelle une **ellipse** (voir tome III).

Exemple 4.

Soit $f: \; x \longmapsto \sqrt{x^2 + 2x - 3}$. Cette fonction est définie si et seulement si $x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$ c'est-à-dire si et seulement si $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -3$.
Le domaine de définition et de continuité de f est

$$D =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$$

Pour tout x de $]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$				$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$				$0 \nearrow +\infty$

on a complété le tableau de variation par la limite de f quand $|x|$ tend vers $+\infty$:

$$\lim_{|x| \to +\infty} (x^2 + 2x - 3) = \lim_{|x| \to +\infty} x^2 = +\infty$$

d'où

$$\lim_{|x| \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 3} = +\infty.$$

Pour rechercher les asymptotes, mettons $f(x)$ sous la forme $ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \varphi = 0$ (cf. § 3.5 c).
Pour tout x de D :

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^2 - 4} = \sqrt{(x+1)^2} + \varphi(x),$$

en posant $\varphi(x) = \sqrt{(x+1)^2 - 4} - \sqrt{(x+1)^2}$

$$\varphi(x) = \frac{(x+1)^2 - 4 - (x+1)^2}{\sqrt{(x+1)^2 - 4} + \sqrt{(x+1)^2}} = \frac{-4}{\sqrt{(x+1)^2 - 4} + \sqrt{(x+1)^2}}$$

on a bien

$$\lim_{|x| \to +\infty} \varphi = 0$$

et pour tout x de D : $\quad f(x) = |x + 1| + \varphi(x).$

Donc pour tout $x \leqslant -3$: $\quad f(x) = -x - 1 + \varphi(x),$

la droite d'équation $y = -x - 1$ est une asymptote et $\overline{PM} = \varphi(x) < 0$ donc la courbe Γ est au-dessous de l'asymptote (fig. 25).
Pour tout $x \geqslant 1$:

$$f(x) = x + 1 + \varphi(x),$$

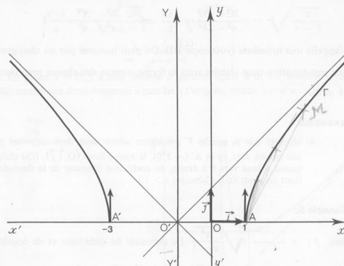


Fig. 25

la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote et $\overline{PM} = \varphi(x) < 0$ donc la courbe Γ est au-dessous de l'asymptote.

Axe de symétrie

Les axes étant rectangulaires, de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le tracé de Γ montre que la droite d'équation $x = -1$ paraît être un axe de symétrie pour Γ. En effet soit O' $(-1, 0)$, cherchons l'équation de Γ dans le nouveau repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout point M du plan, de coordonnées (x, y) dans l'ancien repère et (X, Y) dans le nouveau repère, on a :

$$\begin{cases} x = -1 + X \\ y = Y \end{cases}$$

pour que M appartienne à Γ il faut et il suffit que

$$Y = \sqrt{(-1 + X)^2 + 2(-1 + X) - 3} = \sqrt{X^2 - 4}$$

la fonction : $X \longmapsto \sqrt{X^2 - 4}$ est paire donc Y'Y est bien un axe de symétrie pour Γ.

Remarque

Pour tout X et tout Y réels, on a

$$Y = \sqrt{X^2 - 4} \iff \begin{cases} Y^2 = X^2 - 4 \\ Y \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{X^2}{4} - \dfrac{Y^2}{4} = 1 \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$$

Γ est une partie de la courbe d'équation

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Toute courbe d'équation pouvant se mettre sous l'une des deux formes :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1$$

s'appelle une **hyperbole** (voir tome III). On peut montrer par un changement de repère que son équation peut s'écrire sous la forme connue des classes précédentes : $y_1 = \frac{k}{x_1}$ ($k \neq 0$).

EXERCICE

4. Montrer que la courbe Γ précédente admet deux demi-tangentes parallèles à Oy aux points A (1, 0) et A′ (− 3, 0), le repère étant $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On cherchera la limite quand x tend vers 1 à droite, du coefficient directeur de la demi-droite [A, M), M étant un point de Γ d'abscisse $x > 1$.)

Exemple 5.

Soit $f : x \longmapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. Le domaine de définition et de continuité de f est

$$D =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$$

Pour tout x de $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{(x-1)}}}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2}{2\sqrt{(x-1)^3 x^3}} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}$$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		//////		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	//////	$+\infty$	↘	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	$+\infty$

nous avons étudié les branches infinies au § 3.5 c, exemple 7 et montré que les asymptotes sont les droites d'équations :

$$y = x + \frac{1}{2}$$

$$y = -x - \frac{1}{2}$$

$$x = 1.$$

Pour tout $x < 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}} = -\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

et $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Donc au point $x = 0$, f a une dérivée à gauche égale à 0. La courbe représentative (fig. 26) admet une demi-tangente à gauche à l'origine, portée par $x'x$.

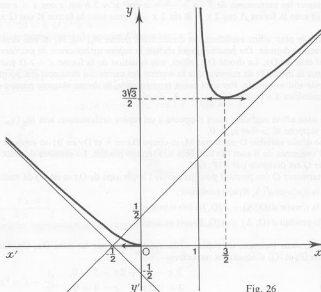


Fig. 26

EXERCICES

Étudier et représenter graphiquement les fonctions f définies par :

6. $f(x) = \frac{x^3 + 2x + 2}{2x}$. **7.** $f(x) = x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

8. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. **9.** $f(x) = x + \sqrt{2x + 1}$.

10. $f(x) = 5x + 3\sqrt{x^2 - 1}$. **11.** $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

12. $f(x) = (-1)^{E(x)}[x - E(x)]$, $E(x)$ étant la partie entière de x.

13. $f(x) = [x - E(x)]^2 + E(x)$. **14.** $f(x) = \cos^2 x \sin 2x$.

15. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$. **16.** $f(x) = \frac{\cos 2x + 1}{2\cos x - 1}$.

17. $f(x) = \sqrt{\cos 2x - \cos x}$. **18.** $f(x) = \sqrt{-4\sin^2 x + 8\sin x - 3}$.

19. $f(x) = x - 2\sin x$.

EXERCICES

Extremums d'une fonction : ex. 1 à 4.
Étude de fonctions et construction de courbes : ex. 5 à 22.
Famille de fonctions : ex. 23 à 26.
Bijection réciproque d'une bijection : ex. 27 à 31.
Discussion graphique d'équations : ex. 32 à 35.
Problèmes divers : ex. 36-37.

Extremums d'une fonction.

3.1 Trouver les extremums de $f : x \longmapsto a \cos^2 x + 2\, b \sin x \cos x + c \sin^2 x + d$ en mettant $f(x)$ sous la forme $A \cos 2x + B \sin 2x + C$ puis sous la forme $K \cos (2x - \alpha) + L$.

3.2 Dans le plan affine euclidien, on donne trois points A_1, A_2, A_3 et une droite variable D a une direction donnée. On peut toujours choisir le repère orthonormé de manière que cette direction soit celle de Oy. La droite D a, alors, une équation de la forme $x = \lambda$ (λ paramètre réel). Déterminer la droite D de manière que la somme des carrés des distances des points A_1, A_2, A_3 à cette droite soit minimale. Par quel point remarquable, la droite obtenue passe-t-elle?
Généraliser à n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ du plan.

3.3 Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, soit M_0 (x_0, y_0) un point donné; on suppose $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.
Une droite variable D passe par M_0 et coupe Ox en A et Oy en B; on suppose que l'abscisse de A et l'ordonnée de B sont des nombres strictement positifs. La distance de deux points quelconques P et Q est désignée par d (P, Q).
Déterminer D (en prenant pour inconnue l'angle aigu de Ox et de D) de manière que :
a) la distance d (A, B) soit minimale;
b) la somme d (O, A) + d (O, B) soit minimale;
c) le produit d (O, A) $\times$ d (O, B) soit minimal.

3.4 On a, dans l'espace, un repère orthonormé porté par les axes Ox, Oy, Oz. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives

(P) $\quad 2x - y + 2z - 5 = 0,$
(Q) $\quad 2x + 2y - z - 4 = 0.$

1° Montrer que ces deux plans sont perpendiculaires.
2° Calculer la distance de A (1, 2, − 1) à (P) et à (Q) et en déduire la distance de A à la droite (D), intersection de (P) et de (Q).
3° Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (D), le paramètre étant t.
4° Pour quelle valeur de t la distance de A à un point de (D) est-elle minimale? Retrouver ainsi la distance de A à (D). (Bacc. E, Clermont, juin 1969.)

Étude de fonctions et construction de courbes.

Étudier et représenter graphiquement les fonctions définies par (ex. 5 à 16) :

3.5 $f(x) = \frac{1}{x} \left[\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}\right].$

3.6 $f(x) = \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x-1)}.$

3.7 $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x - 1}.$

3.8 $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{1 + \sin x}.$

3.9 $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin x}$; établir que $f'(x)$ est du signe de $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. (Bacc. D, Reims 1969.)

3.10 $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$;
$g(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}.$

3.11 $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$;
en déduire la construction de la courbe d'équation :
$$x^2 - y^2 + 3x - 4 = 0.$$

3.12 $f(x) = 5x + 20 + 3\sqrt{x^2 + 8x}$;
en déduire la construction de la courbe d'équation :
$$(y - 5x - 20)^2 = 9(x^2 + 8x).$$

3.13 $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$;
en déduire l'étude et la représentation graphique de
$$g : x \longmapsto \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}.$$

3.14 $f(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{9}{4x}$;
placer la courbe représentative par rapport à celle représentant
$$g : x \longmapsto \frac{x^2}{3}.$$

3.15 $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x + 2}{2x}$;
placer la courbe représentative par rapport à celle représentant
$$g : x \longmapsto \frac{x^2}{2} + 1.$$

3.16 $f(x) = 2x^2 + 1 - \dfrac{1}{x^2}$;
placer la courbe représentative par rapport à celle représentant
$$g : x \longmapsto 2x^2 + 1.$$

3.17 Construire la courbe d'équation cartésienne :
$$y^3 = x^2(x + 1).$$

3.18 Dans le plan affine euclidien, orienté, rapporté à un repère orthonormé de sens positif $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit le point A (1, 0) et le cercle (C) de diamètre [O, A]. Soit T la tangente en A au cercle (C). Un point M appartient à (C) et une détermination θ de l'angle polaire de $\overrightarrow{OM}$ varie de manière que
$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
La droite (OM) coupe T en I. Soit P le symétrique de M par rapport à I.
1° Calculer, en fonction de θ, les cordonnées de M, I, P.
2° Montrer que l'ensemble Γ décrit par P est défini par
$$\begin{cases} y^2(x-2) = x^2(1-x) \\ x \neq 0 \end{cases}$$
Calculer y en fonction de x et construire Γ.

3.19 Construire la courbe d'équation cartésienne :

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1.$$

3.20 Étudier la fonction $f : x \longmapsto x \sin x$ (on sera amené, pour étudier le signe de la dérivée, à résoudre graphiquement l'équation : $x + \operatorname{tg} x = 0$; pour cela, on coupera la courbe d'équation $y = \operatorname{tg} x$ par la droite d'équation $y = -x$).
Quelle est la tangente à l'origine à la courbe Γ représentant f? Montrer que les points de Γ d'abscisses $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) appartiennent à l'une des deux droites d'équations $y = x$ ou $y = -x$ et que Γ est tangente à ces deux droites. Construire Γ.

3.21 Étudier de même et représenter graphiquement la fonction

$$f : x \longmapsto x^2 \sin x.$$

3.22 Étudier de même et représenter graphiquement la fonction

$$f : x \longmapsto \sqrt{x} \sin x.$$

Famille de fonctions.

3.23 Soit les fonctions f_m définies par $f_m(x) = 2mx^4 - x^2 - 4m + 1$ (m paramètre réel).
a) Démontrer que, lorsque m varie, les courbes représentatives C_m des fonctions f_m passent par des points fixes.
b) Quel est le sens de variation de f_m suivant les valeurs de m?
c) Quand f_m possède des extremums dont les abscisses sont non nulles, quel est l'ensemble des points représentatifs sur les courbes correspondantes?

3.24 Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = (m - 1)x^3 + x^2 - m$ (m paramètre réel).
a) Étudier le sens de variation de f_m, suivant les valeurs de m. La courbe représentative dans un plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ s'appelle C_m.
b) Démontrer que C_m passe par un point fixe lorsque m varie.
c) Quel est l'ensemble des points représentatifs des extremums des fonctions f_m d'abscisse non nulle, lorsque m varie?
d) Quel est l'ensemble des points d'inflexion des courbes C_m lorsque m varie?

3.25 Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = \sqrt{mx^2 - x + 1}$.
Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel m, les branches infinies de la courbe représentative C_m.
Construire C_m dans les cas suivants :

$$m = -2; \quad m = 0; \quad m = \frac{1}{4}; \quad m = 1.$$

3.26 Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = \sqrt{(m-1)x^2 + mx + 1}$.
Étudier, suivant les valeurs du paramètre réel m, les branches infinies de la courbe représentative C_m.
Construire C_m dans les cas suivants :

$$m = 0; \quad m = 1; \quad m = 2; \quad m = 3.$$

Bijection réciproque d'une bijection.

3.27 Soit la fonction $f : x \longmapsto y = x^4 - 2x^2$ définie sur $[0, 1]$.
Étudier le sens de variation de f. Quel théorème du cours permet d'affirmer que f est une bijection de $[0, 1]$ sur $[-1, 0]$ et que, par conséquent, f admet une fonction réciproque f^{-1}?
Construire les représentations graphiques de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé.
Calculer x en fonction de y. En déduire $f^{-1}(x)$.
Calculer $(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)$.

3.28 Soit la fonction $f : x \longmapsto y = x^2 + x - 1$ définie sur $[0, 2]$.
Étudier le sens de variation de f. Quel théorème du cours permet d'affirmer que f est une bijection de $[0, 5]$ sur $[-1, 5]$ et que, par conséquent, f admet une fonction réciproque f^{-1}?
Construire les représentations graphiques de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé.
Calculer x en fonction de y. En déduire $f^{-1}(x)$.
Calculer $(f^{-1})'(x)$. (D'après Bacc. C, Strasbourg, juin 1969.)

3.29 Soit la fonction $f : x \longmapsto y = 2\sqrt{x} - x$ définie sur $[0, 2]$.
Étudier le sens de variation de f. Quel théorème du cours permet d'affirmer que f est une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ et que, par conséquent, f admet une fonction réciproque f^{-1}?
Construire les représentations graphiques de f et de f^{-1} dans un même repère orthonormé.
Calculer x en fonction de y. En déduire $f^{-1}(x)$.
Calculer $(f^{-1})'(x)$.

3.30 Soit l'application $E = \mathbb{R}_+ - \{1\}$ dans $F =]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$ définie par :

$$x \longmapsto y = \frac{x^2}{1 - x^2}.$$

Montrer, en calculant x en fonction de y, que f est une bijection.
Sens de variation et représentation graphique de la fonction réciproque

$$f^{-1} : x \longmapsto f^{-1}(x)$$

définie sur F.

3.31 Soit l'application f de $E = \mathbb{R}_+ - \{1\}$ dans $F =]-\infty, -5] \cup]2, +\infty[$ définie par : $x \longmapsto y = \frac{2x^4 + 5}{x^4 - 1}$. Montrer, en calculant x en fonction de y, que f est une bijection.
Sens de variation et représentation graphique de la fonction réciproque

$$f^{-1} : x \longmapsto f^{-1}(x)$$

définie sur F.

Discussion graphique d'équations.

3.32 *a)* Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \longmapsto y = \frac{x(x+1)}{x-2}$.
b) Utiliser la courbe C représentant f pour discuter, suivant les valeurs réelles du paramètre m, le nombre de racines de l'équation :

$$x^2 + (1 - m)x + 2m = 0.$$

c) Utiliser la courbe C pour discuter également, suivant les valeurs de m, le nombre de racines de l'équation :

$$\cos 2u + 2(1 - m)\cos u + 4m + 1 = 0$$

où l'inconnue u appartient à $[0, 2\pi[$.

d) Trouver les points M de C dont les coordonnées sont des entiers relatifs (il sera commode d'écrire y sous la forme $y = ax + b + \frac{c}{x-2}$).

3.33 *a)* Étudier et représenter graphiquement (le repère étant orthonormé) la fonction

$$f : x \longmapsto y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 1}.$$

b) Utiliser la courbe Γ représentant *f* pour discuter, suivant les valeurs réelles du paramètre *m*, le nombre de racines de l'équation :

$$(m - 1)\sin^2 u - (m + 3)\sin u + m - 1 = 0$$

où l'inconnue *u* appartient à $[0\ ,\ 2\pi[$.

c) Une droite d'équation $y = m$ coupe $y'y$ en A et la courbe Γ en B et C. Calculer, en fonction de *m*, les coordonnées du milieu M du segment [B , C] et les coordonnées du point P conjugué harmonique de A par rapport à B et C.

d) Trouver les ensembles décrits par M et P quand *m* varie : on les construira sur le graphique précédent. (Baccalauréat.)

3.34 *a)* Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : x \longmapsto \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

b) En déduire le nombre de racines de l'équation :

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = m,$$

l'inconnue étant le nombre réel *x*, le paramètre réel étant *m*.

3.35 *a)* Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : x \longmapsto 8 \sin x - \operatorname{tg} x.$$

b) En déduire le nombre de racines de l'équation :

$$\frac{m}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 8,$$

l'inconnue étant un nombre réel *x* de $[0\ ,\ 2\pi[$, le paramètre réel étant *m*.

Problèmes divers.

3.36 *a)* Construire la courbe C d'équation $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1}$.

Démontrer que le point de rencontre des deux asymptotes est un centre de symétrie.

b) On considère la droite D de coefficient directeur *a* et passant par le point I d'abscisse − 1 de l'axe $x'Ox$. Discuter le nombre de points d'intersection de D et de C suivant les valeurs de *a*. Trouver les équations des tangentes à la courbe C issues de I et les coordonnées des points de contact. Traduire graphiquement cette discussion en hachurant la partie du plan où se trouvent les droites D ne coupant pas C.

c) Dans le cas où D coupe C en deux points A et B, trouver l'abscisse du milieu M de [A , B] et celle du conjugué harmonique J de I par rapport à A et B.

Trouver et construire sur le graphique précédent les ensembles décrits par M et par J. (Bacc. C, Alger 1960.)

3.37 N. B. Dans ce problème $\{-1, +1\}$ représente l'ensemble des deux nombres réels − 1 et + 1; $]-1\ ,\ +1[$ représente l'ensemble des *x* réels tels que $-1 < x < +1$.

On considère la fonction *f* qui, à tout $x \in \mathbb{R}$, associe (quand cela est possible) :

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{3(x^2 - 1)}.$$

1° *a)* Étudier les variations de *f*. Construire la représentation graphique de *f* dans un système d'axes orthonormé $(x'Ox, y'Oy)$ et montrer qu'elle a un centre de symétrie.

b) On désigne par F l'application de $]-1\ ,\ +1[$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout *x* de $]-1\ ,\ +1[$, associe

$$F(x) = f(x) = \frac{x^3 - 9x}{3(x^2 - 1)}$$

(F est la restriction de *f* à l'intervalle $]-1\ ,\ +1[$).

Expliquer pourquoi F est une application bijective de $]-1\ ,\ +1[$ sur $\mathbb{R}$. Soit F^{-1} l'application réciproque de F. Montrer que F^{-1} est impaire.

2° On se propose de déterminer l'ensemble des *x* réels solutions de l'équation :

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^3 - 9x}{3(x^2 - 1)} = \frac{a^3 - 9a}{3(a^2 - 1)},$$

a étant un paramètre appartenant à $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$.

a) Résoudre graphiquement l'équation (E) à l'aide de 1) *a)*.

b) On cherche, dans cette partie, à résoudre algébriquement l'équation (E) rendue entière (équation du 3ᵉ degré). Après avoir remarqué qu'elle a une solution évidente, déterminer les deux autres; simplifier leurs expressions pour les obtenir sous forme de fonctions homographiques de *a*, soit $u(a)$ et $v(a)$. On choisira :

$$u(a) = \frac{a-3}{a+1} \quad \text{et} \quad v(a) = \frac{-(a+3)}{a-1}.$$

3° *a)* Construire dans un système d'axes orthonormé $(a'\Omega a, z'\Omega z)$ la représentation graphique de la fonction *u* qui, à $a \in \mathbb{R} - \{-1, +1\}$, associe $z = u(a)$. Remarquer que $v(a) = -u(-a)$; en déduire, dans le même système d'axes, la représentation graphique de la fonction *v* définie de façon analogue.

b) Expliquer, à l'aide du 2) *a)*, pourquoi la réunion des représentations graphiques de *u* et *v* n'a pas de points dans le carré

$$-1 \leqslant a \leqslant +1, \qquad -1 \leqslant z \leqslant +1$$

et pourquoi, pour $a < -1$ ou $a > +1$, elle a un point et un seul dans la bande $-1 < z < +1$.

4° On considère la fonction $F^{-1} \circ f$ qui, à $a \in \mathbb{R} - \{-1, +1\}$, associe $F^{-1}[f(a)]$.

a) Après avoir relu attentivement la définition de F^{-1}, préciser l'ensemble des valeursde $F^{-1} \circ f$.

b) Quelle est la partie de la représentation graphique de $F^{-1} \circ f$ correspondant à $a \in]-1\ ,\ +1[$? On la tracera par rapport aux axes $(a'\Omega a, z'\Omega z)$ précédents.

c) Utiliser les représentations graphiques de *u* et *v* pour représenter la fonction $F^{-1} \circ f$ lorsque $a < -1$ et lorsque $a > +1$.

d) La représentation graphique de $F^{-1} \circ f$ est symétrique par rapport à Ω; pouvait-on le prévoir? (Bacc. C, Orléans, juin 1969.)



4| Fonction vectorielle d'une variable réelle. Cinématique du point.

Ce chapitre a pour but d'étendre aux fonctions **vectorielles** *d'une variable réelle les notions de continuité, limites, dérivées données précédemment pour les fonctions* **numériques** *d'une variable réelle.*

Nous avons donné les notions de **topologie** *indispensables à la compréhension du cours.*

Nous avons supposé les espaces vectoriels et les espaces affines **euclidiens** *car c'est la norme et la distance euclidiennes qui sont utilisées en Physique et en Mécanique. Mais on pourrait employer d'autres normes : nous en avons donné quelques exemples.*

Plutôt que de faire une étude séparée de la cinématique du point, après chaque question théorique dans un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_n$, nous avons donné les **applications géométriques et cinématiques** *dans l'espace affine euclidien associé E_n. Cela permet d'éviter bien des redites et de mieux éclairer les développements théoriques.*

4. 1. FONCTION VECTORIELLE D'UNE VARIABLE RÉELLE

a) Définition.

Une fonction vectorielle d'une variable réelle est une fonction dont la source est $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ et dont le but est un espace vectoriel.

Soit F une fonction vectorielle définie sur D ($D \subset \mathbb{R}$), la variable réelle qui décrit D étant t. Soit $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel qui est le but de la fonction vectorielle F. A tout nombre réel t de D, la fonction F associe un vecteur unique $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ et on peut écrire

$$\mathrm{F} : \mathrm{D} \longrightarrow \mathcal{V}$$
$$t \longmapsto \vec{v} = \mathrm{F}(t).$$

On dit que F est une **application vectorielle** de D dans $\mathcal{V}$.

Supposons que $\mathcal{V}$ soit un espace vectoriel de *dimension finie n*, sur $\mathbb{R}$. Si $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$ est une base de $\mathcal{V}$, F sera déterminée le plus souvent par la donnée d'un *n*-uplet $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de fonctions numériques d'une variable réelle définies sur une même partie D de $\mathbb{R}$

$$f_1 : \quad t \longmapsto x_1 = f_1(t)$$
$$f_2 : \quad t \longmapsto x_2 = f_2(t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n : \quad t \longmapsto x_n = f_n(t)$$

l'image par F d'un nombre quelconque t de D est

$$\vec{v} = \mathrm{F}(t) = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = f_1(t)\,\vec{a}_1 + f_2(t)\,\vec{a}_2 + \ldots + f(t)\,\vec{a}_n$$

On notera que les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie donc *les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ qui définissent* F *dépendent de la base choisie.*

b) Addition des fonctions vectorielles.

Soit F et G deux fonctions vectorielles *définies sur une même partie* D de $\mathbb{R}$ et dont le but est le *même espace vectoriel* $\mathcal{V}$. On appelle somme de F et G la fonction vectorielle définie sur D et de but $\mathcal{V}$, notée F + G, telle que :

$$(\forall t \in D) \qquad (F + G)(t) = F(t) + G(t).$$

Si $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n, une base $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n})$ ayant été choisie, et si F et G sont déterminées par des n-uplets $(f_1, f_2, ..., f_n)$ et $(g_1, g_2, ..., g_n)$ de fonctions numériques définies sur D (D $\subset \mathbb{R}$), on a pour tout t de D :

$$\begin{aligned}(F+G)(t) &= F(t) + G(t)\\ &= f_1(t)\vec{a_1} + f_2(t)\vec{a_2} + \dots + f_n(t)\vec{a_n} + g_1(t)\vec{a_1} + g_2(t)\vec{a_2} + \dots + g(t)\vec{a_n}\\ &= [f_1(t) + g_1(t)]\,\vec{a_1} + [f_2(t) + g_2(t)]\,\vec{a_2} + \dots + [f_n(t) + g_n(t)]\,\vec{a_n}\end{aligned}$$

donc F + G est déterminée par le n-uplet $(f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots, f_n + g_n)$ de fonctions numériques définies sur D.

c) Multiplication d'une fonction vectorielle par une fonction numérique d'une variable réelle.

Soit F une fonction vectorielle définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et dont le but est un espace vectoriel $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$. Soit λ une fonction numérique *définie sur la même partie* D de $\mathbb{R}$. On appelle produit de F par λ la fonction vectorielle définie sur D et de but $\mathcal{V}$, notée λF, telle que : $(\forall t \in D) \quad (\lambda F)(t) = \lambda(t)\,F(t)$.

Dans le cas précédent où $\mathcal{V}$ est rapporté à une base $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n})$ et où F est déterminée par $(f_1, f_2, \dots, f_n)$, on a pour tout t de D :

$$\begin{aligned}(\lambda F)(t) = \lambda(t)\,F(t) &= \lambda(t)\left[f_1(t)\,\vec{a_1} + f_2(t)\,\vec{a_2} + \dots + f_n(t)\,\vec{a_n}\right]\\ &= \lambda(t) f_1(t)\,\vec{a_1} + \lambda(t) f_2(t)\,\vec{a_2} + \dots + \lambda(t) f_n(t)\,\vec{a_n}\end{aligned}$$

donc λF est déterminée par le n-uplet $(\lambda f_1, \lambda f_2, \dots, \lambda f_n)$ de fonctions numériques définies sur D.

EXERCICE

1. Soit $(\mathcal{F}(D, \mathcal{V}), +, .)$ l'ensemble des fonctions vectorielles définies sur une même partie D de $\mathbb{R}$ et de but le même espace vectoriel $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$, muni de l'addition des fonctions vectorielles et de la *multiplication par un nombre réel* (le produit d'une fonction vectorielle F de l'ensemble par un nombre réel λ est la fonction vectorielle λF telle que, pour tout t de D, on ait $(\lambda F)(t) = \lambda F(t)$).
Montrer que $(\mathcal{F}(D, \mathcal{V}), +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

d) Produit scalaire de deux fonctions vectorielles.

Si l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ est muni d'un produit scalaire, on appelle produit scalaire des fonctions vectorielles F et G, définies sur une même partie D de $\mathbb{R}$, la fonction *numérique de la variable réelle*, notée F.G, définie sur D et telle que :

$$(\forall t \in D) \qquad (F.G)(t) = F(t).G(t).$$

En particulier le carré scalaire de la fonction vectorielle F définie sur D (D $\subset \mathbb{R}$) est la fonction numérique de la variable réelle, notée F^2, définie sur D et telle que :

$$(\forall t \in D) \qquad F^2(t) = (F(t))^2,$$

rappelons que $(F(t))^2$ signifie $F(t).F(t)$.

Les propriétés du produit scalaire de deux vecteurs s'étendent au produit scalaire de deux fonctions vectorielles.

Dans $\mathcal{E}_3$, par exemple, ($\mathcal{E}_3$ est l'espace vectoriel euclidien de dimension 3) rapporté à une base *orthonormée* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si F et G sont des fonctions vectorielles déterminées par les triplets (f_1, f_2, f_3) et (g_1, g_2, g_3) de fonctions numériques définies sur D (D $\subset \mathbb{R}$), on a pour tout t de D :

$$\begin{aligned}F(t) &= f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}\\ G(t) &= g_1(t)\,\vec{i} + g_2(t)\,\vec{j} + g_3(t)\,\vec{k}\\ (F.G)(t) &= F(t).G(t) = f_1(t)\,g_1(t) + f_2(t)\,g_2(t) + f_3(t)\,g_3(t)\end{aligned}$$

F.G est donc la fonction numérique $f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3$ définie sur D.

On a aussi pour tout t de D :

$$F^2(t) = (F(t))^2 = [f_1(t)]^2 + [f_2(t)]^2 + [f_3(t)]^2$$

F^2 est donc la fonction numérique $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$ définie sur D.

EXERCICE

2. $\mathcal{E}_3$ étant rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit les fonctions vectorielles

$$F : t \longmapsto t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$$
$$G : t \longmapsto t^3\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} - 2t\,\vec{k}$$

définies sur $\mathbb{R}$.
Calculer F + G et F.G.

e) Composition.

Soit $\varphi : t \longmapsto u = \varphi(t)$ une fonction *numérique* définie sur D (D $\subset \mathbb{R}$)
F : $u \longmapsto \vec{v} = F(u)$ une fonction *vectorielle* définie sur D', avec
$\varphi(D) \subset D' \subset \mathbb{R}$.

La composée $F \circ \varphi : t \longmapsto (F \circ \varphi)(t) = F[\varphi(t)]$ est une fonction vectorielle définie sur D et de même but $\mathcal{V}$ que F.

Si $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n})$ et si F est déterminée par un n-uplet $(f_1, f_2, \dots, f_n)$, on a pour tout t de D :

$$(F \circ \varphi)(t) = F[\varphi(t)] = f_1[\varphi(t)]\,\vec{a_1} + f_2[\varphi(t)]\,\vec{a_2} + \dots + f_n[\varphi(t)]\,\vec{a_n}$$

et $F \circ \varphi$ est déterminée par le n-uplet $(f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi, \dots, f_n \circ \varphi)$ de fonctions numérique définies sur D.

4. 2. INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUE ET CINÉMATIQUE

a) Représentation paramétrique d'un ensemble de points.

Soit F une fonction vectorielle définie sur D (D $\subset \mathbb{R}$) et de but un espace vectoriel $\mathcal{V}$, F est donc une application vectorielle de D dans $\mathcal{V}$. Soit $\mathcal{A}$ un espace affine associé à l'espace vectoriel $\mathcal{V}$. Choisissons un point O dans $\mathcal{A}$, on sait qu'il existe un point M unique de $\mathcal{A}$ tel que $\overrightarrow{OM} = F(t)$.

Lorsque t décrit D, le point M décrit un ensemble Γ de l'espace affine $\mathcal{A}$.

L'application $\Phi : \begin{array}{l} D \longrightarrow \Gamma \\ t \longmapsto M \end{array}$

est une *surjection* de D sur Γ. Une telle surjection Φ de D sur l'ensemble $\Gamma = \Phi(D)$ s'appelle une **représentation paramétrique** de Γ, le paramètre étant t. Si $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel sur ℝ rapporté à une base $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n})$ et si F est déterminée par un n-uplet $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de fonctions numériques définies sur D, pour tout t de D on a :

$$\overrightarrow{OM} = F(t) = f_1(t)\,\vec{a_1} + f_2(t)\,\vec{a_2} + \ldots + f_n(t)\,\vec{a_n}$$

et dans le repère $(O, \vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n})$ de $\mathcal{A}$, le point M a pour coordonnées :

$$\text{(I)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = f_n(t) \end{array} \right.$$

nous dirons que la représentation paramétrique de Γ et définie par les relations (I), t décrivant D.

b) Mouvement d'un point. Trajectoire. Loi horaire.

Nous considérons la notion de temps comme une notion primitive.
Une *origine* des temps étant fixée ainsi qu'une *unité de temps*, un instant est déterminé par un nombre réel. Nous dirons que tel événement s'est produit à l'*instant t*, on dit aussi à la *date t*. L'ensemble ℝ étant totalement ordonné, nous dirons que l'instant t_1 est antérieur (resp. postérieur) à l'instant t_2 si et seulement si $t_1 \leqslant t_2$ (resp. $t_1 \geqslant t_2$). Étant donnés deux instants t_1 et t_2 ($t_1 \leqslant t_2$), à l'intervalle $[t_1, t_2]$ qui est un intervalle de ℝ appelé *intervalle de temps*, nous associons $t_2 - t_1$ appelé *durée* de l'intervalle de temps.
La *cinématique du point* étudie les mouvements des points. En Physique et en Mécanique, ces points appartiennent à un espace affine *euclidien* E_n. Le mouvement d'un point M, dans l'intervalle de temps I, par rapport à un repère *orthonormé* $\mathcal{R}$ de E_n est déterminé si l'on connaît à tout instant t de I la « position » de M c'est-à-dire si l'on sait déterminer les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$. Pour cela il suffit de se donner le repère orthonormé $\mathcal{R}$ de E_n et une application F de l'intervalle de temps I dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}_n$ associé à E_n. En effet si, par exemple, un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_3$ est rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit E_3 un espace affine euclidien associé rapporté au repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Considérons une fonction vectorielle $F : t \longmapsto F(t)$ appliquant un intervalle de temps I dans $\mathcal{E}_3$. Soit le point M de E_3 tel que $\overrightarrow{OM} = F(t)$, le mouvement de M, dans l'intervalle I, par rapport au repère $\mathcal{R}$ est déterminé puisque les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$ sont les coordonnées de $F(t)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'ensemble des points M quand t décrit I s'appelle la **trajectoire de M par rapport au repère** $\mathcal{R}$.
Le mouvement de M par rapport à un repère $\mathcal{R}$ donné peut, aussi, être déterminé par la donnée d'une fonction numérique $\varphi : t \longmapsto u = \varphi(t)$ définie sur l'intervalle de temps I et la donnée d'une fonction vectorielle $F : u \longmapsto F(u)$ définie sur une partie de ℝ contenant φ (I). En effet si, par exemple, $\mathcal{E}_3$ est rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et si E_3 est rapporté au repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit M le point de E_3 tel que $\overrightarrow{OM} = (F \circ \varphi)(t) = F[\varphi(t)]$. Les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$ sont connues à tout instant t de I puisque ce sont les coordonnées du vecteur $(F \circ \varphi)(t)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans ce cas, on dit que la fonction numérique $\varphi : t \longmapsto u$ définie sur I est la **loi horaire** du mouvement de M. L'équation $u = \varphi(t)$ s'appelle l'*équation horaire* du mouvement.

Exemple 1. Soit le mouvement d'un point M de E_3, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminé par

$$F : t \longrightarrow \overrightarrow{OM} = 2t\,\vec{i} + (1 - t)\,\vec{j} + (2 + 5t)\,\vec{k}$$

définie sur ℝ.
Une représentation paramétrique de la trajectoire est définie par

$$\text{(I)} \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 5t \end{array} \right.$$

où le paramètre t décrit ℝ. On reconnaît (voir cours de Première) une représentation paramétrique de la droite D passant par le point A (0, 1, 2) et de vecteur directeur (2, − 1, 5). La trajectoire de M relativement au repère $\mathcal{R}$, quand t décrit ℝ, est la droite D.
Supposons le mouvement de M, par rapport à $\mathcal{R}$, déterminé par la loi horaire φ : $t \longrightarrow u = 3 \cos t$ définie sur ℝ et la fonction vectorielle

$$F : u \longmapsto F(u) = 2u\,\vec{i} + (1 - u)\,\vec{j} + (2 + 5u)\,\vec{k}$$

définie sur ℝ.
Les coordonnées de M sont

$$\text{(II)} \left\{ \begin{array}{l} x = 2u \\ y = 1 - u \\ z = 2 + 5u \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad u = 3 \cos t,\ t \text{ décrivant } \mathbb{R},$$

les relations (II) ne sont autres que les relations (I) mais, quand t décrit ℝ, le nombre u décrit le segment [− 3 , 3] donc la trajectoire de M, c'est-à-dire l'ensemble des points M obtenus quand t décrit ℝ dans ce cas, est une partie de la droite D précédente. Une représentation paramétrique de la trajectoire est définie par

$$\text{(II)} \left\{ \begin{array}{l} x = 2u \\ y = 1 - u \\ z = 2 + 5u, \end{array} \right. \quad \text{le paramètre } u \text{ décrivant } [-3, 3].$$

Cette trajectoire est le segment de droite $[M_1, M_2]$, les coordonnées (− 6, 4, − 13) de M_1 et (6, − 2, 17) de M_2 s'obtenant en faisant respectivement $u = -3$ et $u = 3$ dans (II).
Quand t décrit ℝ, u décrit [− 3 , 3] une infinité de fois et le point M décrit le segment $[M_1, M_2]$ une infinité de fois.
Pour tout t de ℝ, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = (F \circ \varphi)(t) = 6 \cos t\,\vec{i} + (1 - 3 \cos t)\,\vec{j} + (2 + 15 \cos t)\,\vec{k}$$

et on peut dire aussi qu'une représentation paramétrique de la trajectoire est définie par

$$\text{(III)} \left\{ \begin{array}{l} x = 6 \cos t \\ y = 1 - 3 \cos t \\ z = 2 + 15 \cos t, \end{array} \right. \quad \text{le paramètre } t \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

On notera la différence entre la représentation paramétrique définie par (II) et celle définie par (III) : celle définie par (II) est une *bijection* de [− 3 , 3] sur $[M_1, M_2]$ tandis que celle définie par (III) est une *surjection* de ℝ sur $[M_1, M_2]$.
La trajectoire de M étant incluse dans une droite, on dit que le mouvement de M est rectiligne. Plus généralement :

par rapport à un repère orthonormé de E_2 (ou de E_3), le mouvement d'un point de E_2 (ou de E_3) est rectiligne si et seulement si sa trajectoire est incluse dans une droite.

Exemple 2. Dans l'espace affine euclidien E_2 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on sait (voir cours de Première) qu'une représentation paramétrique du cercle de centre O et de rayon R est définie par

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta, \end{cases} \quad \text{le paramètre } \theta \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

Le mouvement d'un point M du cercle sera déterminé si l'on se donne une loi horaire $\varphi : t \longmapsto \theta = \varphi(t)$ définie sur un intervalle de temps I.

Si E_2 est *orienté*, le nombre θ a une signification géométrique : c'est une détermination de l'angle des vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ (cet angle est l'angle polaire de $\overrightarrow{OM}$). La trajectoire, ensemble des points M (R cos [$\varphi(t)$], R sin [$\varphi(t)$]) obtenus quand t décrit I, est une partie du cercle. On dit que le mouvement de M, par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, est circulaire. Plus généralement :

par rapport à un repère orthonormé donné de E_2 (ou de E_3), le mouvement d'un point de E_2 (ou de E_3) est circulaire si et seulement si sa trajectoire est incluse dans un cercle.

Exemple 3. Dans l'espace affine euclidien E_3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on appelle **hélice circulaire** l'ensemble Γ des points M de coordonnées

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\,\theta \end{cases}$$

($R > 0$ et $h \neq 0$ donnés, le paramètre θ décrivant $\mathbb{R}$).

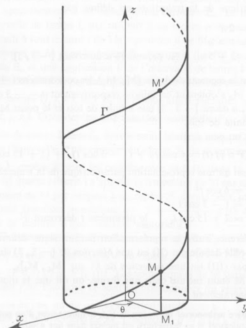


Fig. 1

La projection orthogonale M_1 de M sur le plan (xOy) (fig. 1) décrit le cercle de centre O et de rayon R et si (xOy) est orienté, le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant de sens positif, θ est une détermination de l'angle polaire de $\overrightarrow{OM_1}$. L'ensemble des droites $(M_1 M)$ est une surface cylindrique de révolution d'axe Oz et l'hélice circulaire Γ est une courbe tracée sur la surface.

Soit la fonction vectorielle $F : \theta \longmapsto R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j} + h\,\theta\,\vec{k}$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout θ réel, on a $F(\theta + 2\pi) = F(\theta) + 2\pi h\,\vec{k}$ donc si M et M' sont les points associés à θ et $\theta + 2\pi$, M a pour image M' par la translation de vecteur $2\pi h\,\vec{k}$. Quand θ varie de 0 à 2π, M décrit une *spire* de l'hélice. Les autres spires se déduisent par translation. Le nombre $2\pi\,|h|$ est le *pas* de l'hélice, $|h|$ est le *pas réduit*.

Le mouvement d'un point M de l'hélice circulaire sera déterminé si l'on se donne une loi horaire $\varphi : t \longmapsto \theta = \varphi(t)$ définie sur un intervalle de temps I. La trajectoire, ensemble des points M (R cos [$\varphi(t)$], R sin [$\varphi(t)$], $h\,\varphi(t)$) obtenus quand t décrit I, est une partie de l'hélice circulaire. On dit que le mouvement de M, par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est hélicoïdal. Plus généralement :

par rapport à un repère orthonormé donné de E_3, le mouvement d'un point de E_3 est hélicoïdal si et seulement si sa trajectoire est incluse dans une hélice circulaire.

Exemple 4. Soit Γ la représentation graphique, dans E_2 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction numérique f de la variable réelle x définie sur D ($D \subset \mathbb{R}$). Le mouvement d'un point M $(x, f(x))$ de Γ sera déterminé si l'on se donne une loi horaire $\varphi : t \longmapsto x = \varphi(t)$ définie sur un intervalle de temps I avec $\varphi(I) \subset D$. La trajectoire, ensemble des points M $(\varphi(t), (f \circ \varphi)(t))$ obtenus quand t décrit I, est une partie de Γ.

EXERCICES

On supposera que l'espace affine euclidien E_2 est rapporté à un repère orthonormé.

1. Trouver l'équation cartésienne de l'ensemble contenant la trajectoire de M (x, y) et construire cette trajectoire sachant que :

$$\begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t + \sin t, \end{cases} \quad t \text{ décrivant } [0, 2\pi].$$

2. Mêmes questions avec

$$\begin{cases} x = \dfrac{2R}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{2Rt}{1 + t^2}, \end{cases} \quad R > 0 \text{ donné}, \quad t \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

3. Mêmes questions avec

$$\begin{cases} x = \sin\omega t \\ y = \cos 2\omega t, \end{cases} \quad \omega > 0 \text{ donné}, \quad t \text{ décrivant } \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right].$$

4. Construire la trajectoire de M (x, y) sachant que : M appartient à la parabole d'équation $y = x^2 + x - 2$, la loi horaire est définie par $x = 2\sin t$ sur $\mathbb{R}$.

5. Construire la trajectoire de M (x, y) sachant que : M appartient à la courbe d'équation $x = \sqrt{4y - y^2}$, la loi horaire est définie par $y = 2t^2$ sur $[0, 1]$.

4. 3. NOTIONS DE TOPOLOGIE

a) Espace métrique.

D'une manière générale, E étant un ensemble quelconque, on appelle **distance définie sur E** toute application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant, quels que soient x, y, z de E, les propriétés suivantes :

D_1. $d(x, y) = 0 \iff (x = y)$
D_2. $d(y, x) = d(x, y)$
D_3. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Le couple (E, d) s'appelle un **espace métrique.** Le nombre $d(x, y)$ est la distance des éléments x et y de E.

Dans un espace métrique (E, d) on appelle **boule ouverte** de centre x_0 ($x_0 \in E$) et de rayon h ($h > 0$) l'ensemble des éléments x de E tels que $d(x_0, x) < h$.

b) Espace vectoriel muni d'une norme.

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle **norme définie sur** $\mathcal{V}$ toute application n de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant, quels que soient $\vec{v}, \vec{v'}$ de $\mathcal{V}$ et α de $\mathbb{R}$, les propriétés suivantes :

N_1. $n(\vec{v}) = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$
N_2. $n(\alpha \vec{v}) = |\alpha| \, n(\vec{v})$
N_3. $n(\vec{v} + \vec{v'}) \leqslant n(\vec{v}) + n(\vec{v'})$.

Le nombre réel positif ou nul $n(\vec{v})$ s'appelle la norme du vecteur $\vec{v}$.

Considérons l'application d de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $d(\vec{v}, \vec{v'}) = n(\vec{v} - \vec{v'})$.

Montrons que d est une distance définie sur $\mathcal{V}$. Quels que soient $\vec{v}, \vec{v'}, \vec{v''}$ de $\mathcal{V}$ on a :

$d(\vec{v}, \vec{v'}) = 0 \iff n(\vec{v} - \vec{v'}) = 0 \iff \vec{v} - \vec{v'} = \vec{0}$ (d'après N_1)

$\iff \vec{v} = \vec{v'}$ donc D_1 est vérifiée.

$d(\vec{v'}, \vec{v}) = n(\vec{v'} - \vec{v}) = n[-(\vec{v} - \vec{v'})] = |(-1)| \, n(\vec{v} - \vec{v'})$ (d'après N_2)

$= n(\vec{v} - \vec{v'}) = d(\vec{v}, \vec{v'})$ donc D_2 est vérifiée.

$d(\vec{v}, \vec{v'}) = n(\vec{v} - \vec{v'}) = n[(\vec{v} - \vec{v''}) + (\vec{v''} - \vec{v'})] \leqslant n(\vec{v} - \vec{v''}) + n(\vec{v''} - \vec{v'})$ (d'après N_3)

$d(\vec{v}, \vec{v'}) \leqslant d(\vec{v}, \vec{v''}) + d(\vec{v''}, \vec{v'})$ donc D_3 est vérifiée.

On peut donc énoncer :

Théorème.

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. A toute norme définie sur $\mathcal{V}$ on peut associer une distance d définie sur $\mathcal{V}$ qui est l'application de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$d(\vec{v}, \vec{v'}) = n(\vec{v} - \vec{v'}).$$

Tout espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme n est donc aussi muni d'une distance d qui est la distance associée à n. C'est donc un espace métrique.

EXERCICES

1. On sait que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Montrer que, si x est un nombre réel quelconque, $|x|$ est une norme de x.

2. Soit $\mathcal{V}_3$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3, rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Montrer que, si $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est un vecteur quelconque de $\mathcal{V}_3$:

$|x| + |y| + |z|$ est une norme de $\vec{v}$,
$\sup(|x|, |y|, |z|)$ est aussi une norme de $\vec{v}$,
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est aussi une norme de $\vec{v}$.

Démontrer que pour tout vecteur $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ de $\mathcal{V}_3$, on a

$$\frac{1}{3}(|x| + |y| + |z|) \leqslant \sup(|x|, |y|, |z|) \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant |x| + |y| + |z|.$$

c) Espaces vectoriels euclidiens $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$.

Rappelons qu'un espace vectoriel de dimension 3 est euclidien s'il est muni d'un produit scalaire qui a été défini en classe de Première. Nous avons désigné cet espace vectoriel euclidien par $\mathcal{E}_3$.

Tout plan vectoriel de $\mathcal{E}_3$ est aussi muni d'un produit scalaire, c'est donc un plan vectoriel euclidien désigné par $\mathcal{E}_2$.

Toute droite vectorielle de $\mathcal{E}_3$ est aussi munie d'un produit scalaire, c'est donc une droite vectorielle euclidienne que nous désignerons par $\mathcal{E}_1$.

Rappelons aussi que, si $(\vec{v})^2$ est le carré scalaire d'un vecteur quelconque de $\mathcal{E}_3$ (ou de $\mathcal{E}_2$, ou de $\mathcal{E}_1$), la **norme euclidienne** du vecteur $\vec{v}$ est le nombre $\sqrt{(\vec{v})^2}$ que l'on notera $\|\vec{v}\|$.

On a vu (en Première et en Seconde) que cette norme euclidienne vérifie les propriétés N_1, N_2, N_3 d'une norme. On peut donc, d'après le théorème précédent, associer à cette norme une distance qui est la distance euclidienne.

La distance euclidienne de deux vecteurs quelconques $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ de $\mathcal{E}_3$ (ou $\mathcal{E}_2$, ou $\mathcal{E}_1$) est :

$$d(\vec{v}, \vec{v'}) = n(\vec{v} - \vec{v'}) = \|\vec{v} - \vec{v'}\|.$$

Dans $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1$ qui sont des espaces métriques, une boule ouverte de centre $\vec{v_0}$ ($\vec{v_0}$ appartenant à $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1$) et de rayon h ($h > 0$) est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ de $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1$ tels que : $\|\vec{v_0} - \vec{v}\| < h$ que l'on peut écrire (propriété D_2) : $\|\vec{v} - \vec{v_0}\| < h$.

En particulier, on peut considérer $\mathbb{R}$ comme une droite vectorielle euclidienne.

La distance euclidienne des nombres x et x_0 de $\mathbb{R}$ est

$$d(x, x_0) = n(x - x_0) = \sqrt{(x - x_0)^2} = |x - x_0|$$

et la boule ouverte de centre x_0 et de rayon h est l'ensemble des nombres réels x tels que $|x - x_0| < h$ c'est-à-dire l'intervalle ouvert de centre x_0 :

$$]x_0 - h, x_0 + h[.$$

d) Interprétation géométrique dans les espaces affines euclidiens E_1, E_2, E_3.

Soit E_1, E_2, E_3 des espaces affines euclidiens associés aux espaces vectoriels euclidiens $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$. Choisissons un point O dans E_1 (ou E_2, ou E_3). Soit M_0 et M les points tels que $\vec{v_0}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs quelconques de E_1 (ou E_2, ou E_3)

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{v_0}, \quad \overrightarrow{OM} = \vec{v}.$$

Rappelons que $d(M_0, M) = \|\overrightarrow{M_0M}\| = \|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}\| = \|\vec{v} - \vec{v_0}\|$ est la **distance euclidienne des points M_0 et M.**

Dans E_1, l'image de la boule ouverte de centre $\vec{v_0}$ et de rayon h est le segment ouvert S de centre M_0 et de rayon h :

$$S = \{M \in E_1 \mid d(M_0, M) < h\}.$$

Dans E_2, l'image de cette boule ouverte est le disque ouvert Δ de centre M_0 et de rayon h :

$$\Delta = \{M \in E_2 \mid d(M_0, M) < h\}.$$

Dans E_3, l'image de cette boule ouverte est la boule ouverte B de centre M_0 et de rayon h :

$$B = \{M \in E_3 \mid d(M_0, M) < h\}.$$

4. 4. CONTINUITÉ DE FONCTIONS VECTORIELLES

a) Continuité en un point.

Dans ce qui suit, nous supposerons que le but de la fonction vectorielle est $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$.

Définition.

Une fonction vectorielle F définie sur un intervalle de centre t_0 est continue au point t_0 si et seulement si, quelle que soit la boule ouverte $\mathcal{B}$ de centre $F(t_0)$, il existe un intervalle I de centre t_0 tel que $F(I) \subset \mathcal{B}$.

On rapprochera cette définition de celle de la continuité d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point (cf. § 1.1).

La propriété de continuité en t_0 peut s'écrire en utilisant les quantificateurs :

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \quad (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) \quad (\forall t \in]t_0 - \beta, t_0 + \beta[) \qquad \|F(t) - F(t_0)\| < \alpha.$

Elle peut aussi s'énoncer : quel que soit $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout t réel on ait

$$|t - t_0| < \beta \Longrightarrow \|F(t) - F(t_0)\| < \alpha.$$

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_3$ rapporté à une *base orthonormée* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, supposons que la fonction vectorielle F soit définie par un triplet (f, g, h) de fonctions numériques d'une variable réelle définies sur un intervalle $]a, b[$ de centre t_0. On peut écrire pour tout t de $]a, b[$:

$$F(t) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j} + h(t)\,\vec{k}$$

et $\quad F(t_0) = f(t_0)\,\vec{i} + g(t_0)\,\vec{j} + h(t_0)\,\vec{k}$

d'où

$$\|F(t) - F(t_0)\| = \sqrt{[f(t) - f(t_0)]^2 + [g(t) - g(t_0)]^2 + [h(t) - h(t_0)]^2}$$

On sait que (cf. § 4-3, ex. 2) :

(1) $\quad \|F(t) - F(t_0)\| \leqslant |f(t) - f(t_0)| + |g(t) - g(t_0)| + |h(t) - h(t_0)|$

et que

(2) $\quad |f(t) - f(t_0)| \leqslant \|F(t) - F(t_0)\|$

(3) $\quad |g(t) - g(t_0)| \leqslant \|F(t) - F(t_0)\|$

(4) $\quad |h(t) - h(t_0)| \leqslant \|F(t) - F(t_0)\|$

(On démontrera (1), (2), (3), (4) en élevant au carré les deux membres de chacune de ces inégalités.)

Si F est continue en t_0, quel que soit $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout t réel on ait

$$|t - t_0| < \beta \Longrightarrow \|F(t) - F(t_0)\| < \alpha$$

donc d'après (2), (3) et (4), pour tout t réel on a

$$|t - t_0| < \beta \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| < \alpha$$
$$|t - t_0| < \beta \Longrightarrow |g(t) - g(t_0)| < \alpha$$
$$|t - t_0| < \beta \Longrightarrow |h(t) - h(t_0)| < \alpha$$

donc f, g, h sont continues au point t_0.

Réciproquement si f, g, h sont continues en t_0, quel que soit $\alpha > 0$, il existe $\beta_1 > 0$ $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0$ tels que pour tout t réel on ait

$$|t - t_0| < \beta_1 \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| < \frac{\alpha}{3}$$
$$|t - t_0| < \beta_2 \Longrightarrow |g(t) - g(t_0)| < \frac{\alpha}{3}$$
$$|t - t_0| < \beta_3 \Longrightarrow |h(t) - h(t_0)| < \frac{\alpha}{3}$$

posons $\beta = \inf(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, pour tout t réel on a d'après (1) :

$$|t - t_0| < \beta \Longrightarrow \|F(t) - F(t_0)\| < \alpha$$

donc F est continue au point t_0.

Nous venons de démontrer que, si $\mathcal{E}_3$ est rapporté à une base *orthonormée*, pour que F soit continue en t_0 il faut et il suffit que f, g, h soient continues en t_0. Démontrons que *ce résultat est encore vrai si la base est quelconque.* Soit une autre base quelconque $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ de $\mathcal{E}_3$ et supposons F définie, dans cette nouvelle base, par un triplet (f_1, g_1, h_1) de fonctions numériques de la variable t définies sur le même intervalle $]a, b[$ de centre t_0 que les fonctions f, g et h. Pour tout t de $]a, b[$ on a

$$F(t) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j} + h(t)\,\vec{k} = f_1(t)\,\vec{i_1} + g_1(t)\,\vec{j_1} + h_1(t)\,\vec{k_1}.$$

Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ s'expriment dans la nouvelle base :

$$\vec{i} = \alpha\vec{i_1} + \beta\vec{j_1} + \gamma\vec{k_1}$$
$$\vec{j} = \alpha'\vec{i_1} + \beta'\vec{j_1} + \gamma'\vec{k_1}$$
$$\vec{k} = \alpha''\vec{i_1} + \beta''\vec{j_1} + \gamma''\vec{k_1}$$

d'où

$$F(t) = f(t)\,[\alpha\vec{i_1} + \beta\vec{j_1} + \gamma\vec{k_1}] + g(t)\,[\alpha'\vec{i_1} + \beta'\vec{j_1} + \gamma'\vec{k_1}] + h(t)\,[\alpha''\vec{i_1} + \beta''\vec{j_1} + \gamma''\vec{k_1}]$$

$$F(t) = [\alpha f(t) + \alpha' g(t) + \alpha'' h(t)]\,\vec{i_1} + [\beta f(t) + \beta' g(t) + \beta'' h(t)]\,\vec{j_1} + [\gamma f(t) + \gamma' g(t) + \gamma'' h(t)]\,\vec{k_1}$$

donc

$$f_1(t) = \alpha f(t) + \alpha' g(t) + \alpha'' h(t)$$
$$g_1(t) = \beta f(t) + \beta' g(t) + \beta'' h(t)$$
$$h_1(t) = \gamma f(t) + \gamma' g(t) + \gamma'' h(t)$$

comme f, g, h sont continues en t_0, les fonctions f_1, g_1, h_1 sont aussi continues en t_0 (cf. § 1.5).

Réciproquement si f_1, g_1, h_1 sont continues en t_0, on démontre de même en exprimant $\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ que f, g, h sont continues en t_0. Donc pour que F soit continue en t_0 il faut et il suffit que les trois fonctions qui définissent F dans une base quelconque de $\mathcal{E}_3$ soient continues en t_0. Ce résultat est encore vrai dans $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1$ (dans $\mathcal{E}_2$

raisonner avec deux coordonnées au lieu de trois en prenant la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ et la base quelconque $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$ dans $\mathcal{E}_2$; dans $\mathcal{E}_1$ raisonner avec une seule coordonnée en prenant $\vec{i}$ et $\vec{i_1}$ dans $\mathcal{E}_1$). Nous pouvons donc énoncer :

Théorème.

Une fonction vectorielle F est continue au point t_0 si et seulement si les fonctions numériques de la variable réelle qui la définissent dans une base quelconque de l'espace vectoriel euclidien, but de F, sont continues au point t_0.

REMARQUE

Nous avons supposé que l'espace vectoriel est euclidien. On pourrait définir et étudier la continuité à l'aide d'autres normes (cf. § 4.3, ex. 2). Mais c'est la norme euclidienne qui correspond à la distance usuellement employée en Physique et en Cinématique et c'est cette norme que nous utiliserons par la suite.

EXERCICE

1. Soit $\mathcal{V}_3$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3, rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ est un vecteur quelconque de $\mathcal{V}_3$, on sait (cf. § 4.3, ex. 2) que les nombres : $|x| + |y| + |z|$, $\sup(|x|, |y|, |z|)$, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sont des normes de $\vec{v}$. Montrer que l'application identique de $\mathcal{V}_3$ muni de la distance associée à l'une de ces normes, dans $\mathcal{V}_3$ muni de la distance associée à une autre de ces normes, est continue (à l'aide des inégalités de l'exercice 2 du § 4.3, on montrera que quel que soit la boule de centre un vecteur $\vec{v_0}$ de $\mathcal{V}_3$ muni de l'une des trois distances, il existe une boule de centre $\vec{v_0}$ de $\mathcal{V}_3$ muni d'une autre de ces distances dont l'image est incluse dans la première boule).

b) Opérations sur les fonctions vectorielles continues. Composition.

Des théorèmes relatifs aux opérations sur les fonctions *numériques* continues en t_0 (cf. § 1.3) nous allons déduire des théorèmes relatifs aux opérations sur les fonctions *vectorielles* continues en t_0.

Si, dans une base quelconque de $\mathcal{E}_3$, F et G sont déterminées par des triplets (f_1, f_2, f_3) et (g_1, g_2, g_3) de fonctions numériques définies sur D ($D \subset \mathbb{R}$), D contenant t_0, on vient de voir que ces fonctions numériques sont continues en t_0. Donc $f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3$ sont aussi continues en t_0 (cf. § 1.3), par suite, d'après le théorème précédent, la fonction vectorielle F + G qui est définie sur D (cf. § 4.1 b) par le triplet $(f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3)$ est continue en t_0.

Si λ est une fonction numérique également définie sur D et continue en t_0, les fonctions numériques $\lambda f_1, \lambda f_2, \lambda f_3$ sont aussi continues en t_0 (cf. § 1.3) et, d'après le théorème précédent, la fonction vectorielle λF définie sur D (cf. § 4.1 c) par le triplet $(\lambda f_1, \lambda f_2, \lambda f_3)$ est continue en t_0.

Si la base choisie dans $\mathcal{E}_3$ est orthonormée, on sait (cf. § 4.1 d) que le produit scalaire des fonctions vectorielles F et G précédentes peut s'écrire :

$$F.G = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3,$$

cette fonction numérique, définie sur D, est également continue en t_0 (cf. § 1.3).

On verra que les résultats précédents sont encore vrais dans $\mathcal{E}_2$ ou dans $\mathcal{E}_1$. Concluons :

Théorème.

Si F et G sont des fonctions vectorielles continues en t_0, de *même* but $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$, si λ est une fonction numérique continue en t_0, alors les fonctions vectorielles F + G et λF et le produit scalaire F . G sont continus en t_0.

REMARQUE

Si F est continue en tout point d'un intervalle $I =]a, b[$, on dit que F est continue sur I. Si F et G sont deux fonctions vectorielles continues sur I et si λ est une fonction numérique continue sur I, alors, d'après le théorème précédent, les fonctions vectorielles F + G et λF et le produit scalaire F.G sont continus sur I.

EXERCICE

2. Soit $\mathcal{F}(I, \mathcal{E}_3)$ l'ensemble des fonctions vectorielles définies sur un intervalle $I =]a, b[$, de but $\mathcal{E}_3$ et $\mathcal{C}(I, \mathcal{E}_3)$ l'ensemble des fonctions vectorielles continues sur I, de but $\mathcal{E}_3$. L'addition de ces fonctions étant notée +, la multiplication par un nombre réel notée ., montrer que $(\mathcal{C}(I, \mathcal{E}_3), +, .)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ $(\mathcal{F}(I, \mathcal{E}_3), +, .)$ (cf. § 4.1 c, exercice 1).

Soit $\varphi : t \longmapsto u = \varphi(t)$ une fonction *numérique* définie sur D ($D \subset \mathbb{R}$) et continue en t_0 de D, $F : u \longmapsto \vec{v} = F(u)$ une fonction *vectorielle* définie sur D' avec $\varphi(D) \subset D' \subset \mathbb{R}$ et F est continue en $u_0 = \varphi(t_0)$.

Si l'on se place dans $\mathcal{E}_3$ rapporté à une base quelconque (le raisonnement serait le même dans $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1$) et si F est déterminée par un triplet (f_1, f_2, f_3) de fonctions numériques définies sur D', puisque F est continue en $u_0 = \varphi(t_0)$, les trois fonctions f_1, f_2, f_3 sont continues en $u_0 = \varphi(t_0)$. Il résulte du théorème sur la composition de fonctions numériques continues (cf. § 1.2) que les fonctions composées $f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi, f_3 \circ \varphi$ sont continues en t_0, par suite la fonction vectorielle $F \circ \varphi$ définie sur D (cf. § 4.1 e) par le triplet $(f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi, f_3 \circ \varphi)$ est continue en t_0. Nous énoncerons :

Théorème.

Si φ est une fonction numérique continue en t_0 et F une fonction vectorielle continue en $\varphi(t_0)$, alors la fonction vectorielle composée $F \circ \varphi$ est continue en t_0.

4. 5. LIMITES DE FONCTIONS VECTORIELLES

a) Limite en un point.

Nous supposerons toujours que le but de la fonction vectorielle est $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$. Rappelons qu'un intervalle pointé de centre t_0 est une partie de $\mathbb{R}$ de la forme

$$I' =]t_0 - h, t_0[\cup]t_0, t_0 + h[\quad \text{avec} \quad h > 0$$

ce qu'on peut noter

$$I' =]t_0 - h, t_0 + h[- \{t_0\}$$

cet ensemble n'est autre que l'ensemble des nombres réels t tels que $0 < |t - t_0| < h$.

Définition.

Une fonction vectorielle F définie sur un intervalle pointé de centre t_0 admet une limite $\vec{l}$ au point t_0 si et seulement si, quelle que soit la boule ouverte $\mathcal{B}$ de centre $\vec{l}$, il existe un intervalle pointé I' de centre t_0 tel que $F(I') \subset \mathcal{B}$.

On rapprochera cette définition de l'une de celles de la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point (cf. § 1.8).
Cette définition peut s'écrire à l'aide des quantificateurs :

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \quad (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*) \quad (\forall t \in]t_0 - \beta, t_0 + \beta[- \{t_0\}) \qquad \| F(t) - \vec{l} \| < \alpha.$$

Elle peut aussi s'énoncer : Quel que soit $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout t réel on ait

$$0 < | t - t_0 | < \beta \Longrightarrow \| F(t) - \vec{l} \| < \alpha.$$

On écrit $\lim\limits_{t_0} F = \vec{l}$

On dit aussi que F tend vers $\vec{l}$ quand t tend vers t_0 et on écrit $\lim\limits_{t \to t_0} F = \vec{l}$.

On écrit aussi $\lim\limits_{t \to t_0} F(t) = \vec{l}$.

On démontre le théorème suivant (sa démonstration est la même que celle du théorème du § 4.4 a où l'on remplacera $F(t_0)$ par $\vec{l}$ et $| t - t_0 | < \beta$ par $0 < | t - t_0 | < \beta$) :

Théorème.

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_3$ rapporté à une base quelconque, une fonction vectorielle définie par un triplet (f, g, h) de fonctions numériques de la variable réelle t, a pour limite le vecteur $\vec{l}\,(a, b, c)$ au point t_0 si et seulement si les fonctions f, g, h ont pour limites respectivement a, b, c au point t_0.

Ce théorème est encore vrai dans $\mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$.

REMARQUES

1. Si f, g, h ont des limites au point t_0, elles sont uniques (cf. § 1.8 b). Donc si une fonction vectorielle admet une limite au point t_0, cette limite est unique.
2. Une fonction vectorielle F est continue en t_0 si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} F = F(t_0)$.

b) Extensions de la notion de limite.

Définition.

Une fonction vectorielle F définie à droite de t_0 c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $]t_0, t_0 + h[$ $(h > 0)$ admet une limite $\vec{l}$ à droite au point t_0 si et seulement si, quelle que soit la boule ouverte $\mathcal{B}$ de centre $\vec{l}$, il existe un intervalle $I =]t_0, t_0 + \beta[$ $(\beta > 0)$ tel que $F(I) \subset \mathcal{B}$.

On pourra écrire cette définition à l'aide des quantificateurs. Elle peut aussi s'énoncer : Quel que soit $\alpha > 0$, il existe $\beta > o$ tel que pour tout t réel on ait

$$0 < t - t_0 < \beta \Longrightarrow \| F(t) - \vec{l} \| < \alpha.$$

On écrit $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} F = \vec{l}$, on écrit aussi $\lim\limits_{t \to t_0 + 0} F(t) = \vec{l}$.

Vous définirez de même la limite à gauche au point t_0 que l'on note

$$\lim_{t \to t_0 - 0} F = \vec{l} \quad \text{ou} \quad \lim_{t \to t_0 - 0} F(t) = \vec{l}.$$

Définition.

Une fonction vectorielle F définie sur $]a, +\infty[$ admet une limite $\vec{l}$ quand t tend vers $+\infty$ si et seulement si, quelle que soit la boule ouverte $\mathcal{B}$ de centre $\vec{l}$, il existe une demi-droite $I =]\beta, +\infty[$ $(\beta > 0)$ telle que $F(I) \subset \mathcal{B}$.

Cette définition peut s'énoncer aussi : Quel que soit $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout t réel on ait

$$t > \beta \Longrightarrow \| F(t) - \vec{l} \| < \alpha$$

On écrit $\lim\limits_{t \to +\infty} F = \vec{l}$ ou $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = \vec{l}$

Vous définirez de même ce qu'on appelle limite $\vec{l}$ de F quand t tend vers $-\infty$, que l'on note

$$\lim_{t \to -\infty} F = \vec{l} \quad \text{ou} \quad \lim_{t \to -\infty} F(t) = \vec{l}.$$

Dans $\mathcal{E}_3$ par exemple (il en sera de même dans $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1$) on démontre le théorème suivant (cf. § 4-5 a).

Théorème.

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_3$ rapporté à une base quelconque, une fonction vectorielle, définie par un triplet (f, g, h) de fonctions numériques de la variable réelle t a pour limite le vecteur $\vec{l}\,(a, b, c)$ à droite ou à gauche en t_0 ou quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ si et seulement si les fonctions f, g, h ont pour limites respectivement a, b, c à droite ou à gauche en t_0 ou quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

EXERCICES

Dans $\mathcal{E}_3$ rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, étudier les limites des fonctions vectorielles :

1. $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}\vec{i} + (t^2 + t)\vec{j} + t^4\vec{k}$ au point $t = 0$
2. $t \longmapsto \sqrt{1 - t}\,\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j} + \dfrac{t^2 + 3t - 4}{t - 1}\vec{k}$ à gauche au point $t = 1$
3. $t \longmapsto \dfrac{1}{t}\vec{i} + \dfrac{1}{t^2}\vec{j} + \dfrac{|t + 1|}{t - 1}\vec{k}$ quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

REMARQUE

3. Soit la fonction numérique de la variable réelle : $t \longmapsto \| F(t) \|$, on notera que cette fonction peut avoir également pour limite $+\infty$ au point t_0 (ou à droite ou à gauche) ou quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Par exemple, dans $\mathcal{E}_2$ rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, soit la fonction vectorielle $F : t \longmapsto \dfrac{1}{t}\vec{i} + (t^2 + t - 1)\vec{j}$,

on a $\lim\limits_{|t| \to +\infty} \dfrac{1}{t} = 0$
$\lim\limits_{|t| \to +\infty} (t^2 + t - 1) = +\infty$

donc l'une des coordonnées a pour limite $+\infty$ et

$$\lim_{|t| \to +\infty} \| F(t) \| = \lim_{|t| \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{t^2} + (t^2 + t - 1)^2} = +\infty \qquad \text{(cf. § 1.13 c).}$$

Mais il est possible d'avoir $\lim\limits_{|t| \to +\infty} \| F(t) \| = +\infty$, *aucune des coordonnées n'ayant pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$)*. Soit, par exemple, la fonction vectorielle

$$F : t \longmapsto t \cos t\,\vec{i} + t \sin t\,\vec{j},$$

quand $|t|$ tend vers $+\infty$, chacune des coordonnées $t \cos t$ et $t \sin t$ n'a aucune limite mais $\lim\limits_{|t| \to +\infty} \| F(t) \| = \lim\limits_{|t| \to +\infty} (t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t) = \lim\limits_{|t| \to +\infty} t^2 = +\infty$.

c) Opérations sur les limites

Théorème.

Si F et G sont des fonctions vectorielles de *même* but $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$ et si λ est une fonction numérique de la variable réelle t ayant chacune une limite en t_0, les fonctions vectorielles $F + G$ et λF et le produit scalaire $F \cdot G$ ont chacune une limite en t_0 et on a :

$$\lim_{t \to t_0} (F + G) = \lim_{t \to t_0} F + \lim_{t \to t_0} G$$
$$\lim_{t \to t_0} (\lambda F) = (\lim_{t \to t_0} \lambda)(\lim_{t \to t_0} F)$$
$$\lim_{t \to t_0} (F \cdot G) = (\lim_{t \to t_0} F) \cdot (\lim_{t \to t_0} G)$$

Ces résultats se démontrent sans difficultés en définissant F et G, par exemple dans $\mathcal{E}_3$, par des triplets (f_1, f_2, f_3) et (g_1, g_2, g_3) de fonctions numériques de la variable réelle t et en utilisant les théorèmes sur les limites de fonctions numériques d'une variable réelle (les démonstrations sont les mêmes que celles relatives aux opérations sur les fonctions vectorielles continues données au § 4.4 b). Les résultats sont encore vrais si F, G, λ ont des limites à droite ou à gauche en t_0 ou quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

REMARQUE

4. Le théorème précédent énonce des conditions *suffisantes* pour que $F + G$, λF, $F.G$ aient des limites. Mais *il n'est pas nécessaire* que F, G ou λ aient des limites pour que $F + G$, λF ou $F.G$ en ait une (voir exercice 5 qui suit).

EXERCICES

4. Dans $\mathcal{E}_2$ rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, soit les fonctions vectorielles de la variable réelle t

$$F : t \longmapsto \frac{\sin t}{t}\vec{i} + \frac{\sin 2t}{t}\vec{j}$$
$$G : t \longmapsto (1 + t^2)\vec{i} + \frac{t^3}{1 - t}\vec{j}$$

étudier $\lim_{t \to 0} (F + G)$ et $\lim_{t \to 0} (F.G)$.

5. Dans $\mathcal{E}_2$ rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, soit les fonctions vectorielles de la variable réelle t

$$F : t \longmapsto \frac{1}{t}\vec{i} + \frac{1}{t - 1}\vec{j}$$
$$G : t \longmapsto \sin t\,\vec{i} + (t - 1)\vec{j}$$

soit la fonction numérique de la variable réelle t

$$\lambda : t \longmapsto t(t - 1)$$

étudier les limites de λF et de $F.G$ au point $t = 0$; au point $t = 1$.

4. 6. DÉRIVÉE EN UN POINT

a) Fonction vectorielle différentiable ou dérivable en un point.

Soit une fonction vectorielle F définie sur un intervalle contenant un point t_0.
Nous supposerons toujours que le but de la fonction vectorielle est $\mathcal{E}_1$ ou $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$. La définition d'une fonction vectorielle différentiable et celle d'une fonction vectorielle dérivable en un point sont les mêmes que celles données au chapitre 2 pour une fonction numérique d'une variable réelle.

Définition.

Une fonction vectorielle F est **différentiable** au point t_0 si et seulement s'il existe un vecteur $\vec{l}$ et une fonction vectorielle α définie sur un intervalle I de centre t_0 tels que

$$(\forall t \in I) \qquad F(t) = F(t_0) + (t - t_0)\,\vec{l} + (t - t_0)\,\alpha(t) \qquad (1)$$

avec

$$\lim_{t \to t_0} \alpha = \vec{0}.$$

Si l'on pose $t - t_0 = h$, l'application : $h \longmapsto h\vec{l}$ s'appelle encore la différentielle de F au point t_0 et se note dF_{t_0}. On a donc pour tout h réel

$$dF_{t_0}(h) = h\vec{l},$$

on écrit aussi $\vec{l}\,h$ au lieu de $h\,\vec{l}$.

Il résulte de la relation (1) de la définition que :

$$(\forall t \in I - \{t_0\}) \qquad \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \vec{l} + \alpha(t) \qquad \text{avec } \lim_{t \to t_0} \alpha = \vec{0}$$

on a donc

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \vec{l}. \qquad (2)$$

Réciproquement si l'on a (2), on peut trouver une fonction vectorielle α telle que :

$$\alpha(t) = \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - \vec{l}$$

sur un intervalle pointé de centre t_0 : $I - \{t_0\}$ et telle que $\alpha(t_0) = \vec{k}$ ($\vec{k}$ étant un vecteur que l'on peut se donner arbitrairement; si l'on choisit $\vec{k} = \vec{0}$, alors α est *continue* au point t_0). Nous pouvons alors écrire :

$$(\forall t \in I) \qquad F(t) = F(t_0) + (t - t_0)\,\vec{l} + (t - t_0)\,\alpha(t)$$

avec $\lim_{t \to t_0} \alpha = \vec{0}$. Donc F est différentiable au point t_0. Nous voyons donc que pour que F soit différentiable en t_0 il faut et il suffit que l'on ait (2).

Définition.

Une fonction vectorielle F est **dérivable** au point t_0 si et seulement s'il existe un vecteur $\vec{l}$ tel que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \vec{l}.$$

Ce vecteur $\vec{l}$, lorsqu'il existe, s'appelle la **dérivée** de F au point t_0.

Nous savons (cf. § 4.5 a) que cette limite, lorsqu'elle existe, est unique. On vient de voir que :

Théorème.

Pour toute fonction vectorielle définie sur un intervalle de centre t_0 les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La fonction est différentiable en t_0.
2. La fonction est dérivable en t_0.

Il résulte de la relation (1) de définition d'une fonction vectorielle F différentiable en t_0 que

$$\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$$

ce qui exprime que F est continue en t_0. Donc :

Théorème.

Toute fonction vectorielle différentiable (ou dérivable) au point t_0 est continue en ce point.

Plaçons-nous dans $\mathcal{E}_3$ par exemple (il en est de même dans $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1$). Si $\mathcal{E}_3$ est rapporté à une base quelconque et si F est définie par un triplet (f, g, h) de fonctions numériques de la variable réelle t, soit a, b, c les coordonnées de $\vec{l}$, on sait (cf. § 4.5 a) que pour avoir

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \vec{l}$$

il faut et il suffit que les coordonnées de $\dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ aient pour limites respectivement les coordonnées a, b, c de $\vec{l}$ c'est-à-dire que

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = a \quad , \quad \lim_{t \to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = b \quad , \quad \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = c.$$

On peut donc énoncer :

Théorème.

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_3$ rapporté à une base quelconque, une fonction vectorielle F, définie par un triplet (f, g, h) de fonctions numériques de la variable réelle t, est dérivable au point t_0 si et seulement si les fonctions f, g, h sont dérivables au point t_0.
Les dérivées, lorsqu'elles existent, des fonctions f, g, h en t_0 sont les coordonnées de la dérivée de la fonction vectorielle en t_0.

Si F est dérivable en tout point de $]a, b[$ on dit que F est **dérivable sur** $]a, b[$ et la fonction vectorielle qui associe à tout nombre t de $]a, b[$ la dérivée de F au point t s'appelle la **fonction dérivée** de la fonction F et se note F'. La dérivée de F au point t de $]a, b[$ se note $F'(t)$ et si, par exemple dans $\mathcal{E}_3$ rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a

$$F(t) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j} + h(t)\,\vec{k},$$

f, g, h étant dérivables au point t, on peut écrire d'après le théorème précédent :

$$F'(t) = f'(t)\,\vec{i} + g'(t)\,\vec{j} + h'(t)\,\vec{k}.$$

b) Interprétation géométrique de la dérivée : tangente à une courbe.

Soit un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$, but d'une fonction vectorielle F définie sur D ($D \subset \mathbb{R}$), et E_2 ou E_3 un espace affine euclidien associé où l'on choisit un point O. Considérons les points M_0 et M tels que, t_0 et t appartenant à D :

$$\overrightarrow{OM_0} = F(t_0)$$
$$\overrightarrow{OM} = F(t) \qquad \text{(fig. 2).}$$

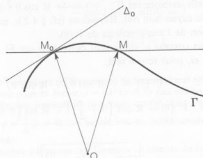


Fig. 2

Définition.

Soit Γ l'ensemble des points M de E_2 ou E_3, où l'on a choisi une origine O, tels que $\overrightarrow{OM} = F(t)$, F étant une fonction vectorielle de la variable réelle t. On dit que la droite $\Delta_0(M_0, \vec{u})$ passant par M_0, image de t_0, et de vecteur directeur $\vec{u}$ est **tangente** à Γ en M_0 si et seulement si :

1. F est continue en t_0.
2. Il existe un vecteur directeur $\Phi(t)$ de la droite (M_0M), Φ étant une fonction vectorielle de t, tel que $\lim_{t \to t_0} \Phi = \vec{u}$.

Si F *est dérivable en* t_0, la condition 1 est réalisée car on sait qu'une fonction vectorielle dérivable en t_0 est continue en t_0 (cf. § 4.6 a). On peut écrire d'autre part :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = F'(t_0)$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}}{t - t_0} = F'(t_0)$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{M_0M}}{t - t_0} = F'(t_0)$$

$\dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{t - t_0}$ est un vecteur directeur de la droite (M_0M).

Si $F'(t_0) \neq \vec{0}$, la droite $\Delta_0(M_0, F'(t_0))$ est donc tangente à Γ en M_0. Concluons :

Théorème.

Si la fonction vectorielle F a une **dérivée non nulle en** t_0, l'ensemble Γ des points M tels que $\overrightarrow{OM} = F(t)$ admet une tangente en M_0, image de t_0, de vecteur directeur $F'(t_0)$.

Exemple 1. Supposons un espace vectoriel euclidien $\mathcal{E}_2$ *orienté* par le choix d'une base orthonormé $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit E_2 un espace affine euclidien associé à $\mathcal{E}_2$, orienté et rapporté au repère orthonormé de sens positif $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une représentation paramétrique du cercle Γ de centre O et de rayon R est définie par

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \qquad (\theta \text{ décrit } \mathbb{R})$$

La fonction vectorielle associée est F : $\theta \longmapsto R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j}$ définie sur $\mathbb{R}$. Nous supposerons le rayon non nul. Rappelons (cf. § 4.2 b, ex. 2) que le nombre réel θ est une détermination de l'angle polaire de F (θ).
Puisque les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction vectorielle F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout θ réel,

$$F'(\theta) = -R\sin\theta\,\vec{i} + R\cos\theta\,\vec{j}$$

que l'on peut écrire $F'(\theta) = R\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + R\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$

ou encore :

$$(1) \qquad \boxed{F'(\theta) = F\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

nous avons $\|F'(\theta)\| = \|F(\theta)\| = R$ et une détermination de l'angle polaire de $F'(\theta)$ est $\theta + \frac{\pi}{2}$.
Puisque $F'(\theta) \neq \vec{0}$, le cercle Γ admet une tangente en M, image de θ, de vecteur directeur $F'(\theta) = F\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$, quel que soit θ réel.
Notons que (1) est vraie en particulier si $R = 1$ c'est-à-dire si $F(\theta)$ est un vecteur unitaire, alors $(F(\theta), F'(\theta))$ est une base orthonormée de $\mathcal{E}_2$, de sens positif.

Exemple 2. Soit, dans E_2 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble Γ des points M (x, y) de représentation paramétrique définie par

$$(I) \quad \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

($a > 0$ et $b > 0$ donnés, θ décrit $\mathbb{R}$).
Un tel ensemble s'appelle une **ellipse.** (On vérifiera que son équation cartésienne est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, cf § 3.6 exemple 3). Dans le cas particulier où $a = b$, Γ est le cercle de centre O et de rayon a.
La fonction vectorielle F : $\theta \longmapsto a\cos\theta\,\vec{i} + b\sin\theta\,\vec{j}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout θ réel, $F'(\theta) = -a\sin\theta\,\vec{i} + b\cos\theta\,\vec{j}$
et $F'(\theta) \neq \vec{0}$ car $a > 0$, $b > 0$ et $\sin\theta$ et $\cos\theta$ ne sont jamais nuls simultanément. Donc l'ellipse Γ admet une tangente en tout point M, image de θ, de vecteur directeur $F'(\theta)$.

Exercice.

Cherchons l'équation cartésienne de la tangente Δ_0 à Γ au point M_0 ($a\cos\theta_0$, $b\sin\theta_0$).
Pour qu'un point P (x, y) appartienne à Δ_0 il faut et il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{M_0P}$ et $F'(\theta_0)$ soient colinéaires; pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que le déterminant du couple $(\overrightarrow{M_0P}, F'(\theta_0))$ soit nul :

$$\begin{vmatrix} x - a\cos\theta_0 & -a\sin\theta_0 \\ y - b\sin\theta_0 & b\cos\theta_0 \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire, après simplification,

$$bx\cos\theta_0 + ay\sin\theta_0 = ab$$

ou encore $\frac{x}{a}\cos\theta_0 + \frac{y}{b}\sin\theta_0 = 1$

c'est-à-dire $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$

REMARQUE

On sait (voir cours de Première et de Seconde) que toute courbe dont l'équation peut se mettre sous la forme $y = ax^2$ ($a \neq 0$) (au besoin, après un changement d'axes) s'appelle une **parabole** et que toute courbe dont l'équation peut se mettre sous la forme $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) (au besoin encore, après un changement d'axes) s'appelle une **hyperbole.**
Ces courbes admettent une tangente en chacun de leurs points car on sait que toute courbe d'équation $y = f(x)$ admet une tangente en chacun de ses points M $(x, f(x))$ si f est dérivable en x.
Toute courbe dont une représentation paramétrique est définie sur $\mathbb{R}$ par (I) s'appelle une **ellipse**. On vient de montrer l'existence d'une tangente en tout point de l'ellipse. De telles courbes (parabole, hyperbole, ellipse) s'appellent des **coniques**. Elles seront étudiées dans le tome III.

Exemple 3. Soit, dans E_3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'ensemble Γ des points M (x, y, z) de représentation paramétrique définie par

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\,\theta \end{cases} \qquad (R > 0 \text{ et } h \neq 0 \text{ donnés, } \theta \text{ décrit } \mathbb{R})$$

On sait que Γ s'appelle une hélice circulaire (cf § 4.2 b) et nous avons donné une interprétation géométrique du paramètre θ.
La fonction vectorielle F : $\theta \longmapsto R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j} + h\theta\,\vec{k}$ est dérivable quel que soit θ réel et sa dérivée au point θ est

$$F'(\theta) = -R\sin\theta\,\vec{i} + R\cos\theta\,\vec{j} + h\vec{k},$$

pour tout θ réel on a $F'(\theta) \neq \vec{0}$ car $\|F'(\theta)\| = R^2 + h^2 \neq 0$ puisque $R \neq 0$ et $h \neq 0$ donc Γ admet une tangente en tout point M, image de θ, de vecteur directeur $F'(\theta)$.
On remarque que la norme euclidienne du vecteur $F'(\theta)$ est $\|F'(\theta)\| = \sqrt{R^2 + h^2}$ constante. Si α est une détermination de l'angle des vecteurs $\vec{k}$ et $F'(\theta)$, on sait (cf. cours de Première) que

$$\vec{k}.F'(\theta) = \|\vec{k}\| \times \|F'(\theta)\| \times \cos\alpha = \sqrt{R^2 + h^2}\cos\alpha,$$

par ailleurs le produit scalaire $\vec{k}.F'(\theta)$ peut se calculer à l'aide des coordonnées 0, 0, 1 de $\vec{k}$ et des coordonnées $-R\sin\theta$, $R\cos\theta$, h de $F'(\theta)$:

$$\vec{k}.F'(\theta) = 0 \times (-R\sin\theta) + 0 \times (R\cos\theta) + 1 \times h = h$$

d'où $\sqrt{R^2 + h^2}\cos\alpha = h$

par suite $\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}},$

l'angle des vecteurs $\vec{k}$ et $F'(\theta)$ est donc constant quand θ décrit $\mathbb{R}$. La tangente à l'hélice circulaire, ayant pour vecteur directeur $F'(\theta)$, fait un angle constant avec l'axe Oz défini par O et $\vec{k}$ (fig. 3).

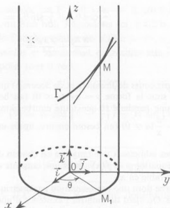


Fig. 3

Si M_1 est la projection orthogonale de M sur le plan (xOy), quand θ décrit $\mathbb{R}$, l'ensemble des droites (M_1M) est une surface cylindrique de révolution d'axe Oz. Chacune des droites (M_1M) s'appelle une génératrice de la surface. Nous pouvons énoncer :

Une hélice circulaire admet une tangente en chacun de ses points. Cette tangente fait un angle constant avec l'axe de la surface cylindrique de révolution qui contient l'hélice circulaire ou encore avec les génératrices de cette surface.

EXERCICES

On supposera les espaces affines euclidiens E_2 ou E_3 rapportés à des repères orthonormés.

1. Trouver les équations cartésiennes de la tangente en M à l'hélice circulaire définie précédemment. Soit T le point d'intersection de cette tangente et du plan (xOy), M_1 la projection orthogonale de M sur (xOy). Calculer $\|\overrightarrow{M_1T}\|$.
2. Soit Γ l'ensemble des points M (x, y) de E_2 de représentation paramétrique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t^2}{2} \\ y = \dfrac{t^2}{2} - 3t + 1. \end{cases}$$

Trouver l'équation de la tangente, si elle existe, aux points de Γ correspondant à

$$t = 1 \quad , \quad t = 2 \quad , \quad t = 3.$$

c) Interprétation cinématique de la dérivée : vecteur-vitesse.

En Cinématique, si l'espace affine euclidien E_n ($n = 1$ ou 2 ou 3) est rapporté à un repère $\mathcal{R}$, nous supposerons que $\mathcal{R}$ est orthonormé lorsque $n = 2$ ou $n = 3$ et que $\mathcal{R} = (O, \vec{i})$ lorsque $n = 1$ en prenant O sur la droite E_1 et $\vec{i}$ étant un vecteur unitaire de cette droite. Nous donnerons alors la définition suivante :

Définition.

Soit le mouvement d'un point M de E_n, rapporté à un repère $\mathcal{R}$ d'origine O, déterminé par $F : t \longmapsto \overrightarrow{OM} = F(t)$ définie sur un intervalle de temps I. Si la fonction vectorielle F est dérivable au point t de I, on appelle vecteur-vitesse du point M à l'instant t, dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}$, la dérivée de F au point t.

Ce vecteur-vitesse sera noté $\vec{v}$, $\boxed{\vec{v} = F'(t)}$.

Le théorème du sous-paragraphe précédent (cf. § 4.6 b) peut alors s'énoncer sous une autre forme équivalente :

Théorème.

Si un point, en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$, a un vecteur-vitesse non nul à l'instant t, sa trajectoire admet une tangente en ce point, à l'instant t, de vecteur directeur ce vecteur-vitesse.

REMARQUE

Certains auteurs appellent « *paramètres directeurs* » d'une droite, les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite. Donc les coordonnées du vecteur-vitesse d'un point, quand ce vecteur n'est pas nul, sont des paramètres directeurs de la tangente à la trajectoire en ce point.

EXERCICES

On supposera E_2 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3. Les coordonnées de M de E_2 sont

$$\begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$$

à tout instant t de $[0, 2\pi]$.

Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{v}$ de M. Que peut-on dire de $\|\vec{v}\|$?

4. Les coordonnées de M de E_2 sont

$$\begin{cases} x = 1 - 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$$

à tout instant t de $\mathbb{R}$.

On appelle P le point où la tangente en M à la trajectoire de M rencontre la droite d'équation $x = 1$. Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse de M et celles du vecteur-vitesse de P. Comparer les normes de ces deux vecteurs.

4. 7. OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS VECTORIELLES DÉRIVABLES. COMPOSITION

a) Opérations sur les fonctions vectorielles dérivables (ou différentiables).

Soit F et G deux fonctions *vectorielles* de même but $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$, dérivables sur $]a, b[$ et λ une fonction *numérique* également dérivable sur $]a, b[$. Les fonctions F, G, λ sont donc différentiables en tout point t_0 de $]a, b[$. Il existe des intervalles I, J, K de centre t_0 tels que

$$(\forall t \in I) \qquad F(t) = F(t_0) + (t - t_0) F'(t_0) + (t - t_0)\,\alpha(t) \tag{1}$$

avec $\lim\limits_{t \to t_0} \alpha = \vec{0}$,

$$(\forall t \in J) \qquad G(t) = G(t_0) + (t - t_0) G'(t_0) + (t - t_0)\,\beta(t) \tag{2}$$

avec $\lim\limits_{t \to t_0} \beta = \vec{0}$,

$$(\forall t \in K) \qquad \lambda(t) = \lambda(t_0) + (t - t_0)\,\lambda'(t_0) + (t - t_0)\,\gamma(t) \tag{3}$$

avec $\lim\limits_{t \to t_0} \gamma = 0$.

(On notera que α et β sont des fonctions vectorielles qui ont pour limite le vecteur nul $\vec{0}$ de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$ au point t_0, alors que γ est une fonction numérique qui a pour limite le nombre 0 au point t_0).

Il résulte de (1) et (2) que :

$$(\forall t \in I \cap J) \quad F(t) + G(t) = F(t_0) + G(t_0) + (t - t_0)\,[F'(t_0) + G'(t_0)] + (t - t_0)\,\delta(t),$$

en posant $\delta(t) = \alpha(t) + \beta(t)$, on a $\lim\limits_{t \to t_0} \delta = \lim\limits_{t \to t_0} \alpha + \lim\limits_{t \to t_0} \beta = \vec{0}$, donc la fonction vectorielle $F + G$ est différentiable (ou dérivable) au point t_0 de $]a, b[$ et sa dérivée au point t_0 est :

$$F'(t_0) + G'(t_0)$$

Il résulte que (1) et (3) que :

$$(\forall t \in I \cap K) \quad \lambda(t)\,F(t) = \lambda(t_0)\,F(t_0) + (t - t_0)\,[\lambda'(t_0)\,F(t_0) + \lambda(t_0)\,F'(t_0)] + (t - t_0)\,\varepsilon(t),$$

en posant

$$\varepsilon(t) = [\lambda(t_0) + (t - t_0)\,\lambda'(t_0)]\,\alpha(t) + \gamma(t)\,[F(t_0) + (t - t_0)\,F'(t_0)] + (t - t_0)\,[\gamma(t)\,\alpha(t) + \lambda'(t_0)\,F'(t_0)],$$

les théorèmes sur les limites montrent que $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon = \vec{0}$, donc la fonction vectorielle λF est différentiable (ou dérivable) en tout point t_0 de $]a, b[$ et sa dérivée au point t_0 est :

$$\lambda'(t_0)\,F(t_0) + \lambda(t_0)\,F'(t_0).$$

Il résulte également de (1) et (2) que :

$$(\forall t \in I \cap J) \quad F(t).G(t) = F(t_0).G(t_0) + (t - t_0)\,[F'(t_0).G(t_0) + F(t_0).G'(t_0)] + (t - t_0)\,\varphi(t),$$

en posant

$$\varphi(t) = \alpha(t).[G(t_0) + (t - t_0)\,G'(t_0)] + \beta(t).[F(t_0) + (t - t_0)\,F'(t_0)] + (t - t_0)\,[\alpha(t).\beta(t) + F'(t_0).\,G'(t_0)],$$

les théorèmes sur les limites montrent que $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi = 0$, donc le produit scalaire $F.G$ est aussi une fonction numérique différentiable (ou dérivable) en tout point t_0 de $]a, b[$ et sa dérivée au point t_0 est :

$$F'(t_0).G(t_0) + F(t_0).G'(t_0).$$

Concluons :

Théorème.

Si F et G sont des fonctions vectorielles de même but $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_3$ et dérivables sur $]a, b[$ et si λ est une fonction numérique dérivable sur $]a, b[$, les fonctions vectorielles $F + G$ et λF et le produit scalaire $F . G$ sont dérivables sur $]a, b[$ et l'on a sur $]a, b[$:

$$(F + G)' = F' + G'$$
$$(\lambda F)' = \lambda' F + \lambda F'$$
$$(F.G)' = F'.G + F.G'.$$

REMARQUES

1. On rapprochera ces formules de celles sur l'addition et la multiplication des fonctions numériques d'une variable réelle dérivables (cf. § 2.5). Les démonstrations sont d'ailleurs *identiques*. On peut aussi écrire entre les différentielles :

$$d(F + G)_{t_0} = dF_{t_0} + dG_{t_0}$$
$$d(\lambda F)_{t_0} = d\lambda_{t_0} F(t_0) + \lambda(t_0)\,dF_{t_0}$$
$$d(F.G)_{t_0} = dF_{t_0}.G(t_0) + F(t_0).dG_{t_0}$$

2. Si λ est un nombre réel donné et si F est une fonction dérivable sur I on a

$$(\lambda F)' = \lambda F'$$

définie sur I.
Si l'on désigne par $\mathcal{F}(I, \mathcal{E}_3)$ l'ensemble des fonctions vectorielles définies sur I et de but $\mathcal{E}_3$ par exemple,
$\mathcal{C}(I, \mathcal{E}_3)$ l'ensemble des fonctions vectorielles continues sur I et de but $\mathcal{E}_3$,
$\mathcal{D}(I, \mathcal{E}_3)$ l'ensemble des fonctions vectorielles dérivables sur I et de but $\mathcal{E}_3$,
l'addition de ces fonctions étant notée + et la multiplication par un nombre réel notée ., on vérifiera que $(\mathcal{D}(I, \mathcal{E}_3), +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}(I, \mathcal{E}_3), +, .)$ qui est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathcal{E}_3), +, .)$ (cf. § 4.1 c, exercice 1 et § 4.4 b, exercice 2).

Application.

Si F est une fonction vectorielle dérivable sur un intervalle ouvert I, il résulte du théorème précédent que son carré scalaire F^2 est une fonction numérique également dérivable sur I et l'on a sur I :

$$(F^2)' = (F.F)' = F'.F + F.F' = 2\,F.F'.$$

La norme euclidienne de $F(t)$ est constante sur I si et seulement si F^2 est constante sur I. On peut écrire pour toute fonction vectorielle F dérivable sur I :

$$(F^2 \text{ constante sur I}) \iff [(\forall t \in I) \quad (F^2)'(t) = 0] \quad (\text{cf. § 3.1 c})$$
$$\iff [(\forall t \in I) \quad 2\,F(t).F'(t) = 0]$$
$$\iff [(\forall t \in I) \quad F(t) \text{ et } F'(t) \text{ orthogonaux}]$$

On peut donc énoncer :

Théorème.

Soit $F : t \longmapsto F(t)$ une fonction vectorielle dérivable sur un intervalle ouvert I. La norme euclidienne du vecteur $F(t)$ est constante sur I si et seulement si les vecteurs $F(t)$ et $F'(t)$ sont orthogonaux en tout point t de I.

b) Dérivée d'une fonction vectorielle composée.

Soit $\varphi : t \longmapsto u = \varphi(t)$ une fonction *numérique* dérivable au point t_0,
$F : u \longmapsto F(u)$ une fonction *vectorielle* dérivable au point $u_0 = \varphi(t_0)$.

Démontrons que la fonction vectorielle $F \circ \varphi$ est dérivable au point t_0. La démonstration est la même que celle du § 2.6 relative à la composition des fonctions numériques d'une variable réelle dérivables. Les fonctions φ et F étant dérivables respectivement en t_0 et en u_0, sont aussi différentiables en ces points. Il existe des intervalles I et J de centres t_0 et u_0 tels que :

$$(\forall t \in I) \quad \varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\,[\varphi'(t_0) + \alpha(t)] \qquad (1)$$

avec $\lim_{t \to t_0} \alpha = 0$,

$$(\forall\, u \in J) \quad F(u) = F(u_0) + (u - u_0)\,[F'(u_0) + \beta(u)] \tag{2}$$

avec $\lim_{u \to u_0} \beta = \vec{0}$ et l'on peut supposer la fonction vectorielle β continue en u_0 (cf. § 4.6 a).

Puisque φ est dérivable en t_0, φ est continue en t_0 donc il existe un intervalle I' de centre t_0 tel que $\varphi(I') \subset J$ et pour tout nombre t de $I \cap I'$, la fonction vectorielle $F \circ \varphi$ est définie et on peut écrire en remplaçant dans (2) le nombre u par $\varphi(t)$ et u_0 par $\varphi(t_0)$:

$$F[\varphi(t)] = F[\varphi(t_0)] + [\varphi(t) - \varphi(t_0)]\,[F'[\varphi(t_0)] + \beta[\varphi(t)]]$$

remplaçons $\varphi(t) - \varphi(t_0)$ par son expression tirée de (1) :

$$F[\varphi(t)] = F[\varphi(t_0)] + (t - t_0)\,[\varphi'(t_0) + \alpha(t)]\,[F'[\varphi(t_0)] + \beta[\varphi(t)]]$$

ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$(F \circ \varphi)(t) = (F \circ \varphi)(t_0) + (t - t_0)\,\varphi'(t_0)\,F'[\varphi(t_0)] + (t - t_0)\,\gamma(t),$$

avec $\quad \gamma(t) = \alpha(t)\,F'[\varphi(t_0)] + \alpha(t)\,\beta[\varphi(t)] + \varphi'(t_0)\,\beta[\varphi(t)],$

puisque φ est continue en t_0 et β est continue en $u_0 = \varphi(t_0)$, la composée $\beta \circ \varphi$ est continue en t_0 donc $\lim_{t \to t_0} \beta[\varphi(t)] = \beta[\varphi(t_0)] = \beta(u_0) = \vec{0}$; on a aussi $\lim_{t \to t_0} \alpha = 0$ par suite, en appliquant les théorèmes sur les limites, $\lim_{t \to t_0} \gamma = \vec{0}$. Donc $F \circ \varphi$ est différentiable (ou dérivable) au point t_0 et sa dérivée en ce point est

$$\varphi'(t_0)\,F'[\varphi(t_0)]$$

que nous écrirons encore $\qquad (F' \circ \varphi)(t_0)\,\varphi'(t_0)$.

Plus généralement nous pouvons énoncer, lorsque t décrit un intervalle $]a, b[$:

Théorème.

Si φ est une fonction numérique dérivable sur $]a, b[$ et si F est une fonction vectorielle dérivable en tout point de $\varphi(]a, b[)$, la fonction vectorielle composée $F \circ \varphi$ est dérivable sur $]a, b[$ et sa fonction dérivée est définie sur $]a, b[$ par :

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\,\varphi'.$$

REMARQUE

En posant $t - t_0 = h$, on en déduit que :

$$d(F \circ \varphi)_{t_0}(h) = F'[\varphi(t_0)]\,\varphi'(t_0)\,h,$$

on a aussi

$$d\varphi_{t_0} \quad : \quad h \longmapsto \varphi'(t_0)\,h = k$$
$$dF_{u_0} \quad : \quad k \longmapsto F'(u_0)\,k$$

donc

$$dF_{u_0} \circ d\varphi_{t_0} : \quad h \longmapsto F'(u_0)\,\varphi'(t_0)\,h = F'[\varphi(t_0)]\,\varphi'(t_0)\,h$$

donc

$$d(F \circ \varphi)_{t_0} = dF_{\varphi(t_0)} \circ d\varphi_{t_0}$$

ce qui montre que, comme pour les fonctions numériques d'une variable réelle (cf. § 2.6), la différentielle de la composée $F \circ \varphi$ en t_0 est égale à la composée des différentielles des fonctions φ et F respectivement en t_0 et en $\varphi(t_0)$.

c) Application au calcul du vecteur-vitesse.

1. Mesure algébrique du vecteur-vitesse.

Soit un espace affine euclidien E_n rapporté à un repère $\mathcal{R}$ d'origine O, $\mathcal{R}$ étant orthonormé si $n = 2$ ou $n = 3$, $\mathcal{R} = (O, \vec{i})$ si $n = 1$ avec O sur E_1 et $\vec{i}$ vecteur unitaire de E_1. Soit Γ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = F(u)$, F étant une fonction vectorielle dérivable en tout point d'une partie de D de $\mathbb{R}$. Le mouvement de M, par rapport à $\mathcal{R}$, dans un intervalle de temps I, sera déterminé si l'on se donne une loi horaire φ : $t \longmapsto u = \varphi(t)$ définie sur I $(\varphi(I) \subset D)$ et la trajectoire Γ' de M sera une partie de Γ. Supposons, en outre, φ dérivable sur I. Le vecteur-vitesse du point M sera à tout instant t de I :

$$\vec{v} = (F \circ \varphi)'(t) = F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t) = F'(u)\,\varphi'(t) \quad \text{avec} \quad u = \varphi(t).$$

Si $F'(u) \neq \vec{0}$ au point $u = \varphi(t)$, Γ admet une tangente en M de vecteur-directeur $F'(u)$. Or $\vec{v} = F'(u)\,\varphi'(t)$ est colinéaire à $F'(u)$ donc si (M, V) est le bi-point tel que $\overrightarrow{MV} = \vec{v}$, on peut dire que (M, V) est porté par la tangente en M à la trajectoire (fig. 4).

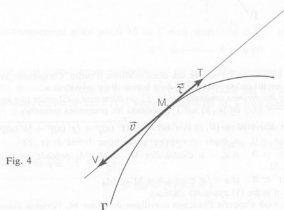


Fig. 4

Soit alors $\vec{\tau} = \dfrac{F'(u)}{\| F'(u) \|}$, c'est un vecteur unitaire de la tangente en M. Orientons la tangente par le choix de ce vecteur unitaire. On peut écrire pour tout t de I, pourvu que $F'(u) \neq \vec{0}$ en tout point u de $\varphi(I)$:

$$\vec{v} = \frac{F'(u)}{\| F'(u) \|}\,\| F'(u) \|\,\varphi'(t) = \| F'(u) \|\,\varphi'(t)\,\vec{\tau}$$

$$\boxed{\vec{v} = v\,\vec{\tau}},$$

le nombre $v = \| F'(u) \|\,\varphi'(t)$ est la **mesure algébrique du vecteur-vitesse** de M. Nous avons représenté à la figure 4 les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\tau}$ par des bi-points (M, V) et (M, T).

REMARQUE

Donnons une interprétation géométrique de $\| F'(u) \|$. Dans E_3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, supposons que l'on ait une *représentation paramétrique bijective*

$$x = f(u), \quad y = g(u), \quad z = h(u)$$

de $[\alpha, \beta]$ sur Γ. Soit M_1 et M_2 les images respectives de u_1 et u_2 qui sont deux nombres quelconques de $[\alpha, \beta]$.
On peut définir une relation d'ordre en Γ en convenant que :
(1) $M_1 \preccurlyeq M_2$ (M_1 précède M_2) si et seulement si $u_1 \geqslant u_2$.
On peut définir une autre relation d'ordre sur Γ en convenant que :
(2) $M_1 \preccurlyeq M_2$ si et seulement si $u_1 \leqslant u_2$.

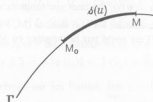


Fig. 5

Orienter Γ c'est choisir l'une de ces deux relations d'ordre. Choisissons la relation d'ordre (1), on dit qu'on oriente Γ « dans le sens des u croissants ».
Si f, g, h ont des dérivées continues sur $[\alpha, \beta]$, on démontre qu'il existe une application $s : u \longmapsto s(u)$ de $[\alpha, \beta]$ sur Γ possédant les propriétés suivantes :

s est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ et $s'(u) = \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2 + [h'(u)]^2}$
$s(u_0) = 0$, u_0 étant un nombre quelconque donné de $[\alpha, \beta]$
$s(u) > 0$ si $u_0 < u$ c'est-à-dire $M_0 \prec M$ (M_0 précède strictement M) (fig. 5).
$s(u) < 0$ si $u < u_0$ c'est-à-dire $M \prec M_0$

(la relation d'ordre (1) ayant été choisie).
Ce nombre $s(u)$ s'appelle l'abscisse curviligne du point M, l'origine étant M_0. Le nombre $| s(u) |$ s'appelle la *longueur de l'arc de courbe* d'extrémités M_0 et M. On dit que Γ est *rectifiable* et si F est la fonction vectorielle :

$$u \longmapsto f(u)\vec{i} + g(u)\vec{j} + h(u)\vec{k}$$

définie sur $[\alpha, \beta]$ on a alors

$$\| F'(u) \| = \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2 + [h'(u)]^2} = s'(u).$$

Si la loi horaire est $\varphi : t \longmapsto u$ dérivable sur un intervalle de temps I avec $\varphi(I) \subset [\alpha, \beta]$, on a alors pour tout t de I :

$$v = \| F'(u) \| \varphi'(t) = s'(u) \varphi'(t).$$

Dans le cas particulier où $u = t$ (les conditions précédentes étant réalisées) on a pour tout t de I :

$$v = s'(t)$$

et si l'on adopte la relation d'ordre (1), Γ est orientée « dans le sens des t croissants », on dit que Γ est orientée « dans le sens du mouvement ».

2. Mouvement circulaire.

Dans E_2 orienté rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de sens positif, soit Γ le cercle de centre O et de rayon R dont une représentation paramétrique est définie par

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \qquad (\theta \text{ décrit } \mathbb{R}) \qquad \text{(fig. 6).}$$

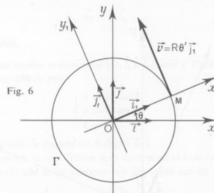


Fig. 6

Le mouvement d'un point M de Γ sera déterminé si l'on connaît une loi horaire

$$\varphi : t \longmapsto \theta = \varphi(t)$$

que nous supposerons dérivable sur un intervalle de temps I. La fonction vectorielle $F : \theta \longmapsto R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction composée $F \circ \varphi$ est donc dérivable sur I et le vecteur-vitesse de M, à tout instant t de I, est

$$\vec{v} = (F \circ \varphi)'(t) = F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$$
$$\vec{v} = F'(\theta)\,\theta', \qquad \text{avec } \theta = \varphi(t),$$

rappelons que (cf. § 4.6 a)

$$F'(\theta) = F\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

donc
$$\vec{v} = F\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\theta'.$$

Si $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ est le repère orthonormé de sens positif tel que θ soit une détermination de l'angle $\vec{i}$ et $\vec{i_1}$ (fig. 6),

$$F\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = R\vec{j_1}$$

d'où
$$\vec{v} = R\theta'\vec{j_1},$$

la mesure algébrique du vecteur-vitesse de M, lorsqu'on prend $\vec{j_1}$ pour vecteur unitaire, est donc :

$$\boxed{v = R\theta'}.$$

La dérivée θ' s'appelle la **vitesse angulaire** du mouvement circulaire à l'instant t.

3. Exercice résolu.

Dans un plan affine euclidien E_2 orienté par le choix d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ un autre repère orthonormé de sens positif et θ une détermination de l'angle polaire de $\vec{i_1}$ (fig. 7). Soit M le point de coordonnées $(\rho, 0)$ dans le repère $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1})$. On a donc $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{i_1}$.

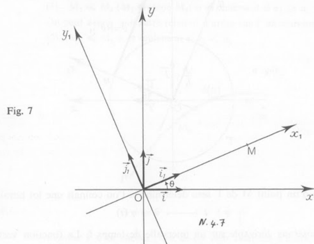


Fig. 7

Si l'on se donne deux fonctions numériques

$$\varphi : \quad t \longmapsto \theta = \varphi(t)$$
$$\lambda : \quad t \longmapsto \rho = \lambda(t)$$

définies sur un intervalle de temps I, le mouvement de M par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est déterminé par la fonction vectorielle

$$F : \quad t \longmapsto \overrightarrow{OM} = \rho \vec{i_1} = \lambda(t) [\cos [\varphi(t)] \vec{i} + \sin [\varphi(t)] \vec{j}]$$

définie sur I. Si l'on suppose φ et λ dérivables sur I, le vecteur-vitesse de M dans son mouvement par rapport à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est, à tout instant t de I :

$$\vec{v} = F'(t) = \rho' \vec{i_1} + \rho \vec{i_1}'$$

or

$$\vec{i_1}' = \vec{j_1} \theta'$$

donc

$$\vec{v} = \rho' \vec{i_1} + \rho\theta' \vec{j_1}.$$

Si $\rho = R > 0$ constant sur I, on retrouve le mouvement circulaire précédent. On remarquera que ρ' et $\rho\theta'$ sont les coordonnées du vecteur-vitesse de M dans son mouvement par rapport à $(O, \vec{i}, \vec{j})$ mais que ces coordonnées ont été calculées *dans la base* $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$, le repère $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ étant en mouvement par rapport à $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dans le repère $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1})$, le point M a pour coordonnées $(\rho, 0)$ et le mouvement de M par rapport à ce repère est déterminé par la fonction vectorielle :

$$t \longmapsto \rho \vec{i_1} = \lambda(t) \vec{i_1}$$

dérivable sur I. Le vecteur-vitesse de M dans son mouvement par rapport à ce repère est, à tout instant t de I :

$$\vec{v_1} = \rho' \vec{i_1}.$$

4. Mouvement hélicoïdal.

Dans E_3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit Γ l'hélice circulaire de représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = h\theta \end{cases}$$

($R > 0$ et $h \neq 0$ donnés, le paramètre θ décrit $\mathbb{R}$).
Le mouvement d'un point M sur l'hélice sera déterminé si l'on connaît une loi horaire $\varphi : \quad t \longmapsto \theta = \varphi(t)$ que nous supposerons dérivable sur un intervalle de temps I.

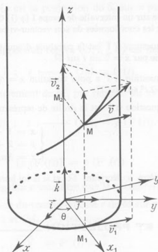


Fig. 8

Soit M_1 et M_2 les projections orthogonales de M respectivement sur (xOy) et sur Oz (fig. 8). A tout instant t de I :

$$(1) \qquad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2},$$

les fonctions vectorielles :

$$t \longmapsto \overrightarrow{OM_1} = R \cos [\varphi(t)] \vec{i} + R \sin [\varphi(t)] \vec{j}$$
$$t \longmapsto \overrightarrow{OM_2} = h\varphi(t) \vec{k}$$

sont dérivables sur I donc, d'après (1), par dérivation, le vecteur-vitesse $\vec{v}$ du point M est la somme des vecteurs-vitesses $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des points M_1 et M_2.

Le point M_1 a un mouvement circulaire et son vecteur-vitesse est, avec les notations des exemples précédents :

$$\vec{v}_1 = R\theta' \vec{j}_1.$$

Le point M_2 a un mouvement rectiligne et son vecteur-vitesse est

$$\vec{v}_2 = h\theta' \vec{k}$$

donc, à tout instant t de I, le vecteur-vitesse de M est :

$$\vec{v} = R\theta' \vec{j}_1 + h\theta' \vec{k}.$$

θ' s'appelle encore la **vitesse angulaire** du mouvement hélicoïdal à l'instant t.

EXERCICE

On supposera les espaces affines euclidiens E_2 ou E_3 rapportés à des repères orthonormés.

1. Un point M appartient à la courbe Γ d'équation $y = f(x)$, f étant dérivable en tout point d'une partie D de $\mathbb{R}$ et la loi horaire du mouvement de M est

$$\varphi : t \longmapsto x = \varphi(t)$$

dérivable sur un intervalle de temps I (φ (I) $\subset$ D).
Calculer les coordonnées de son vecteur-vitesse.

2. Même question si Γ est la parabole d'équation $y = x^2 + x - 2$ et si la loi horaire est définie par $x = 2 \sin t$ sur $\mathbb{R}$.

3. Même question si Γ a pour équation $x = \sqrt{4y - y^2}$ et si la loi horaire est défine par $y = 2t^2$ sur $[0, 1]$.

4. Même question si Γ est la droite de représentation paramétrique définie par

$$\begin{cases} x = 1 - 2u \\ y = 2 + 5u \\ z = 3u, \end{cases}$$

le paramètre u décrivant $\mathbb{R}$, et si la loi horaire est définie par $u = \cos t$ sur $\mathbb{R}$.

4. 8. DÉRIVATION ET PROJECTION

Soit Δ et π une droite vectorielle et un plan vectoriel de $\mathcal{E}_3$ $(\Delta \cap \pi = \vec{0})$. Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de π et $\vec{k}$ un vecteur non nul de Δ, on sait que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathcal{E}_3$. Soit la fonction vectorielle

$$F : t \longmapsto F(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

dérivable sur un intervalle I donc f, g, h sont aussi dérivables sur I. Si p est la projection de $\mathcal{E}_3$ sur π parallèlement à Δ, on a pour tout t de I :

$$p(F(t)) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$$
$$[p(F(t))]' = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j}.$$

On a aussi pour tout t de I :

$$F'(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$$
$$p(F'(t)) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j}$$

donc $$[p(F(t))]' = p(F'(t))$$

On peut donc écrire sur I :

$$\boxed{(p \circ F)' = p \circ F'}$$

EXERCICE

Démontrer qu'il en est de même si l'on considère la projection de $\mathcal{E}_3$ sur Δ parallèlement à π, si l'on considère une projection de $\mathcal{E}_2$ sur une droite vectorielle de $\mathcal{E}_2$ parallèlement à une autre droite vectorielle de $\mathcal{E}_2$.

Soit E_3 un espace affine euclidien associé à $\mathcal{E}_3$. Considérons un point O de E_3, soit D la droite (affine) passant par O et associée à la droite vectorielle Δ précédente, P le plan (affine) passant par O et associé au plan vectoriel π précédent. Désignons par p_1 la projection de E_3 sur P parallèlement à D. Si M est un point quelconque de E_3, on a :

$$p(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM_1} \quad (p \text{ est la projection de } \mathcal{E}_3 \text{ sur } \pi \text{ parallèlement à } \Delta)$$
$$p_1(M) = M_1.$$

Si le mouvement de M par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est défini par

$$F : t \longmapsto \overrightarrow{OM} = F(t),$$

F étant dérivable sur I, le mouvement de M_1 par rapport au même repère est alors défini sur I par :

$$F_1 : t \longmapsto \overrightarrow{OM_1} = p(F(t)).$$

On a vu que pour tout t de I :

$$[p(F(t))]' = p(F'(t))$$

le premier membre de cette égalité n'est autre que le vecteur-vitesse $\vec{v}_1$ du point M_1 et le second membre est la projection du vecteur-vitesse $\vec{v}$ de M sur π parallèlement à Δ. Si l'on construit les bi-points (M, V) et (M_1, V_1) tels que

$$\overrightarrow{MV} = F'(t) = \vec{v}$$
$$\overrightarrow{M_1V_1} = F'(t) = \vec{v}_1$$

on a $$M_1 = p_1(M) \quad , \quad V_1 = p_1(V)$$ (fig. 9, page 160).

Le raisonnement est le même si l'on fait une projection de E_3 sur D parallèlement à P ou une projection de E_2 sur une droite de E_2 parallèlement à une direction donnée. Nous énoncerons :

Théorème.

Le vecteur-vitesse de la projection d'un point M sur un plan ou une droite donnés est égal à la projection sur le plan vectoriel ou sur la droite vectorielle associés du vecteur-vitesse du point M.

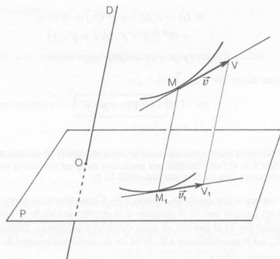


Fig. 9

Exemple.

Soit un point M de E_3 ayant un mouvement hélicoïdal par rapport au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (cf. 4.7 c).

Si M_1 et M_2 sont les projections orthogonales de M respectivement sur (xOy) et sur Oz (se reporter à la figure 8), soit $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ les vecteurs-vitesses respectivement de M, M_1, M_2; $\vec{v}_1$ est la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur le plan vectoriel $\pi(\vec{i}, \vec{j})$ et $\vec{v}_2$ est la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la droite vectorielle $\Delta(\vec{k})$.

4. 9. DÉRIVÉES SUCCESSIVES

a) Définitions.

Soit une fonction vectorielle F dérivable sur $]a, b[$. Elle admet une fonction dérivée définie sur $]a, b[$ que nous avons notée F′. Si F′ est elle-même dérivable sur $]a, b[$, elle admet une fonction dérivée définie sur $]a, b[$ qui s'appelle la **fonction dérivée seconde** de F (ou la fonction dérivée d'ordre 2 de F) et qu'on note F″. On dit que F est dérivable deux fois sur $]a, b[$. Plus généralement, on définira ainsi les fonctions dérivées successives de F sur $]a, b[$, si elles existent, $F^{(3)}$ ou F‴, ..., $F^{(n)}$ appelées **fonction dérivée troisième** (ou d'ordre 3), ..., **fonction dérivée** $n^{\text{ième}}$ (ou d'ordre n) de F. On dit alors que **F est dérivable n fois** sur $]a, b[$. Par analogie, la fonction dérivée F′ de F est aussi appelée fonction dérivée première (ou d'ordre 1) de F.

Les vecteurs $F''(t)$, $F'''(t)$, ..., $F^{(n)}(t)$ sont les images de t ($t \in]a, b[$) par les fonctions vectorielles F″, F‴, ..., $F^{(n)}$. On les appelle **dérivée seconde** (ou d'ordre 2), **dérivée troisième** (ou d'ordre 3), ..., **dérivée** $n^{\text{ième}}$ (ou d'ordre n) de la fonction F au point t de $]a, b[$.

Dans $\mathcal{E}_3$ par exemple (il en sera de même dans $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1$) rapporté à une base quelconque $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si F est définie par un triplet (f, g, h) de fonctions numériques définies sur $]a, b[$, pour que F soit dérivable n fois sur $]a, b[$ il faut et il suffit (cf. § 4.6 a) que les fonctions f, g, h soient dérivables n fois sur $]a, b[$. On peut alors écrire pour tout t de $]a, b[$:

$$F(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$
$$F'(t) = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + h'(t)\vec{k}$$
$$F''(t) = f''(t)\vec{i} + g''(t)\vec{j} + h''(t)\vec{k}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)\vec{i} + g^{(n)}(t)\vec{j} + h^{(n)}(t)\vec{k}$$

b) Applications. Vecteur-accélération.

1. Soit, dans $\mathcal{E}_2$ orienté par le choix d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, la fonction vectorielle

$$F : \theta \longmapsto R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j} \qquad (R > 0 \text{ donné})$$

définie sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions cosinus et sinus étant dérivables n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) sur $\mathbb{R}$, la fonction vectorielle F est dérivable n fois sur $\mathbb{R}$. Pour tout θ de $\mathbb{R}$,

$$F'(\theta) = -R\sin\theta\,\vec{i} + R\cos\theta\,\vec{j}$$
$$= R\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + R\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$$
$$= F\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(cf. § 4-6 b)}$$

plus généralement calculons $F^{(n)}(\theta)$ en raisonnant par récurrence. Supposons que l'on ait, pour tout θ de $\mathbb{R}$ et pour un entier $n > 1$ donné :

$$F^{(n-1)}(\theta) = F\left[\theta + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

c'est-à-dire

$$F^{(n-1)}(\theta) = R\cos\left[\theta + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]\vec{i} + R\sin\left[\theta + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]\vec{j}$$

alors

$$F^{(n)}(\theta) = -R\sin\left[\theta + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]\vec{i} + R\cos\left[\theta + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]\vec{j}$$
$$= R\cos\left[\theta + (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]\vec{i} + R\sin\left[\theta + (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]\vec{j}$$
$$= R\cos\left(\theta + n\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + R\sin\left(\theta + n\frac{\pi}{2}\right)\vec{j}$$
$$= F\left(\theta + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Donc dans le cas où $F(\theta) = R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j}$,

$$(\forall \theta \in \mathbb{R}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \qquad \boxed{F^{(n)}(\theta) = F\left(\theta + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

Dans E_2 orienté, le repère orthonormé $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ étant de sens positif, $\theta + n\frac{\pi}{2}$ est une détermination de l'angle polaire de $F^{(n)}(\theta)$ et les dérivées successives de la fonction vectorielle F, pour la valeur θ, sont $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$, $\overrightarrow{OM}$ (fig. 10).

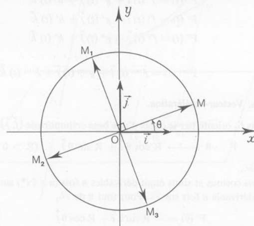


Fig. 10

2. Nous allons étudier plus particulièrement la dérivée seconde d'une fonction vectorielle en un point, lorsqu'elle existe.

Définition.

Soit le mouvement d'un point M de E_n, rapporté à un repère $\mathcal{R}$ d'origine O, déterminé par F : $t \longmapsto \overrightarrow{OM} = F(t)$ définie sur un intervalle de temps I. Si la fonction vectorielle F est dérivable deux fois au point t de I, on appelle vecteur-accélération du point M à l'instant t, dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}$, la dérivée seconde de F au point t.

Ce vecteur-accélération sera noté $\vec{\gamma}$, $\boxed{\vec{\gamma} = F''(t)}$

Dans les conditions précédentes, soit $\overrightarrow{Om} = \vec{v} = F'(t)$. L'ensemble $\mathcal{H}$ des points m quand t décrit I s'appelle l'**hodographe du mouvement** de M par rapport à $\mathcal{R}$ (fig. 11).

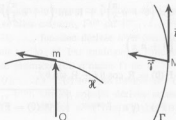


Fig. 11

Le vecteur-vitesse de m, à tout instant t de I, est la dérivée de F' à l'instant t c'est-à-dire $F''(t)$. Concluons :

Théorème.

Si F est une fonction vectorielle dérivable deux fois sur I, le vecteur-accélération du point M de E_n tel que $\overrightarrow{OM} = F(t)$, dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}$, est le vecteur-vitesse du point m décrivant l'hodographe du mouvement.

Dans E_n rapporté à un repère $\mathcal{R}$ d'origine O, soit le mouvement d'un point M défini par

- une loi horaire φ : $t \longmapsto u = \varphi(t)$ dérivable deux fois sur I;
- une fonction vectorielle F : $u \longmapsto \overrightarrow{OM} = F(u)$ dérivable deux fois en tout point de φ (I).

Si $F'(u) \neq \vec{0}$ en tout point u de φ (I), on a vu (cf. § 4.7 c) que pour tout t de I le vecteur-vitesse de M est :

(1) $$\vec{v} = v\,\vec{\tau}$$

avec $v = \| F'(u) \| \varphi'(t)$ et $\vec{\tau} = \dfrac{F'(u)}{\| F'(u) \|}$ qui est un vecteur unitaire de la tangente en M à la trajectoire.

Montrons que les fonctions : $t \longmapsto v$ et $t \longmapsto \vec{\tau}$ sont dérivables sur I. Par exemple dans $\mathcal{E}_3$ rapporté à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (on raisonnera de même dans $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1$), si F est déterminée par un triplet (f, g, h) de fonctions numériques dérivables deux fois en tout point de φ (I), la fonction numérique :

$$u \longmapsto \| F'(u) \| = \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2 + [h'(u)]^2}$$

est dérivable en tout point de φ (I) et puisque φ est dérivable deux fois sur I, la fonction φ' est dérivable sur I. Donc les fonctions :

$$t \longmapsto v = \| F'(u) \| \varphi'(t)$$

$$t \longmapsto \vec{\tau} = \frac{F'(u)}{\| F'(u) \|} \qquad \text{avec } u = \varphi(t)$$

sont dérivables sur I, nous désignerons les dérivées au point t de I respectivement par v' et $\vec{\tau}'$.

Il résulte alors de (1), par dérivation, qu'en tout point t de I :

$$\vec{\gamma} = v'\,\vec{\tau} + v\,\vec{\tau}'.$$

Puisque $\|\vec{\tau}\| = 1$ constante sur I, on sait (cf. § 4.7 a) que $\vec{\tau}'$ est orthogonal à $\vec{\tau}$. Si l'on désigne par $\vec{n}$ un vecteur unitaire colinéaire à $\vec{\tau}'$ et par conséquent orthogonal à $\vec{\tau}$, on peut écrire pour tout t de I :

$$\boxed{\vec{\gamma} = \gamma_t\,\vec{\tau} + \gamma_n\,\vec{n}}$$

où $\gamma_t = v'$ s'appelle l'**accélération tangentielle** et γ_n s'appelle l'**accélération normale** du mouvement de M à l'instant t.

REMARQUE

Si $v = s'(t)$ (cf. § 4.7 c, remarque), on a donc $\gamma_t = v' = s''(t)$.
Nous préciserons la valeur de γ_n dans le cas d'un mouvement circulaire.

3. Mouvement circulaire.

Dans E_2 orienté rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de sens positif, soit le mouvement circulaire d'un point M défini par

- une loi horaire $\varphi : \ t \longmapsto \theta = \varphi(t)$ dérivable deux fois sur un intervalle de temps I
- la fonction vectorielle F : $\theta \longmapsto \overrightarrow{OM} = R \cos\theta\, \vec{i} + R \sin\theta\, \vec{j}$ définie sur $\mathbb{R}$ (elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ autant de fois que l'on veut).

Soit $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ le repère orthonormé de sens positif tel que θ soit une détermination de l'angle de $\vec{i}$ et $\vec{i_1}$ (fig. 12).

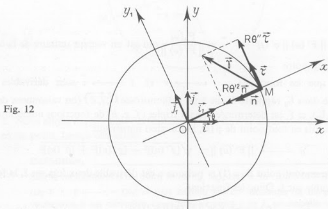


Fig. 12

On a vu (cf. § 4.7 c) que le vecteur-vitesse de M à tout instant t de I est :

(1) $$\vec{v} = R\,\theta'\,\vec{j_1},$$

la dérivée de la fonction : $\theta \longmapsto \vec{j_1}$ au point $\theta = \varphi(t)$ $(t \in I)$ est $-\vec{i_1}$ (voir première application de ce sous-paragraphe), la dérivée de la fonction : $t \longmapsto \vec{j_1}$ au point t de I est $-\vec{i_1}\,\theta'$, donc, d'après (1), par dérivation, quel que soit t de I :

$$\vec{\gamma} = R\,\theta''\,\vec{j_1} - R\,\theta'^2\,\vec{i_1}$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = -R\,\theta'^2\,\vec{i_1} + R\,\theta''\,\vec{j_1}}$$

les coordonnées du vecteur-accélération de M, dans son mouvement circulaire par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ont été calculées dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$, le repère $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ étant « mobile » ; ces coordonnées sont : $-R\,\theta'^2$, $R\,\theta''$. Nous remarquons que, pour tout t de I, on a $-R\,\theta'^2 \leqslant 0$.

Le vecteur unitaire $\vec{\tau} = \vec{j_1}$ est un vecteur-directeur de la tangente en M, soit $\vec{n} = -\vec{i_1}$ qui est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{\tau}$ [s'il est représenté par un bi-point (M, N), il est dirigé vers le centre du cercle], dans la base $(\vec{\tau}, \vec{n})$ on a, pour tout t de I :

$$\vec{\gamma} = R\,\theta''\,\vec{\tau} + R\,\theta'^2\,\vec{n}$$

l'accélération tangentielle est $\boxed{\gamma_t = R\,\theta''}$

l'accélération normale est $\gamma_n = R\,\theta'^2$, comme $v = R\,\theta'$, on a aussi

$$\gamma_n = R\,\frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{R}$$

donc $$\boxed{\gamma_n = R\,\theta'^2 = \frac{v^2}{R}}$$

EXERCICE

1. Dans E_2 orienté, les repères orthonormés $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ sont de sens positif et θ est une détermination de l'angle de $\vec{i}$ et $\vec{i_1}$. Soit $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{i_1}$ (cf. § 4.7 c, exercice résolu), les fonctions $\varphi : \ t \longmapsto \theta = \varphi(t)$ et $\lambda : \ t \longmapsto \rho = \lambda(t)$ étant dérivables deux fois sur I. Calculer les coordonnées du vecteur-accélération de M, dans son mouvement par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, dans la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1})$.
Examiner les deux cas particuliers : ρ constant ou θ constant.

4. Mouvement hélicoïdal.

Dans E_3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit le mouvement hélicoïdal d'un point M défini par

- une loi horaire $\varphi : \ t \longmapsto \theta = \varphi(t)$ dérivable deux fois sur un intervalle de temps I
- la fonction vectorielle F : $\theta \longmapsto \overrightarrow{OM} = R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j} + h\,\theta\,\vec{k}$ définie sur $\mathbb{R}$ ($R > 0$ et $h \neq 0$ donnés), F est dérivable sur $\mathbb{R}$ autant de fois que l'on veut.

Soit M_1 et M_2 les projections orthogonales de M respectivement sur (xOy) et sur Oz (fig. 13).

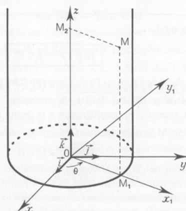


Fig. 13

A tout instant t de I :

(1) $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2},$$

les fonctions vectorielles :

$$t \longmapsto \overrightarrow{OM_1} = R\cos[\varphi(t)]\,\vec{i} + R\sin[\varphi(t)]\,\vec{j}$$
$$t \longmapsto \overrightarrow{OM_2} = h\,\varphi(t)\,\vec{k}$$

sont dérivables deux fois sur I donc, d'après (1), par dérivations successives, le vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ du point M est la somme des vecteurs-accélérations $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$ des points M_1 et M_2.

Le point M_1 a un mouvement circulaire et (cf. exemple précédent)

$$\vec{\gamma}_1 = -R\,\theta'^2\,\vec{i}_1 + R\,\theta''\,\vec{j}_1.$$

Le point M_2 a un mouvement rectiligne et

$$\vec{\gamma}_2 = h\,\theta''\,\vec{k}$$

donc, à tout instant t de I, le vecteur-accélération de M est :

$$\vec{\gamma} = -R\,\theta'^2\,\vec{i}_1 + R\,\theta''\,\vec{j}_1 + h\,\theta''\,\vec{k}.$$

Nous remarquons que : $\vec{\gamma}_1$ est la projection orthogonale de $\vec{\gamma}$ sur le plan vectoriel $\pi(\vec{i},\vec{j})$

$\vec{\gamma}_2$ est la projection orthogonale de $\vec{\gamma}$ sur la droite vectorielle $\Delta(\vec{k})$.

Plus généralement, si p est une projection de $\mathcal{E}_3$ sur un plan vectoriel $\pi(\vec{i},\vec{j})$ parallèlement à la droite vectorielle $\Delta(\vec{k})$ et si F : $t \longmapsto F(t) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j} + h(t)\,\vec{k}$ est une fonction vectorielle dérivable deux fois sur I, on a pour tout t de I :

$$p(F(t)) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j}$$
$$[p(F(t))]' = f'(t)\,\vec{i} + g'(t)\,\vec{j}$$
$$[p(F(t))]'' = f''(t)\,\vec{i} + g''(t)\,\vec{j}.$$

On a aussi pour tout t de I :

$$F'(t) = f'(t)\,\vec{i} + g'(t)\,\vec{j} + h'(t)\,\vec{k}$$
$$F''(t) = f''(t)\,\vec{i} + g''(t)\,\vec{j} + h''(t)\,\vec{k}$$
$$p(F''(t)) = f''(t)\,\vec{i} + g''(t)\,\vec{j}$$

donc

(2) $$[p(F(t))]'' = p(F''(t))$$

et on peut écrire sur I :

$$\boxed{(p \circ F)'' = p \circ F''}$$

Il en résulte que, dans E_3 rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on peut donner une interprétation cinématique de ce résultat. Soit p_1 la projection de E_3 sur le plan P (plan affine passant par O et associé à π) parallèlement à la droite D (droite affine passant par O et associée à Δ). Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = F(t)$ et $M_1 = p_1(M)$, on a aussi

$$\overrightarrow{OM_1} = p(F(t)).$$

Le premier membre de (2) est le vecteur-accélération de M_1 et le second membre est la projection du vecteur-accélération de M sur π parallèlement à Δ.

Le raisonnement est le même si l'on fait une projection de E_3 sur D parallèlement à P ou une projection de E_2 sur une droite de E_2 parallèlement à une direction donnée.

Comme pour le vecteur-vitesse (cf. § 4.8), nous pouvons énoncer :

Théorème.

Le vecteur-accélération de la projection d'un point M sur un plan ou une droite donnés est égal à la projection sur le plan vectoriel ou la droite vectorielle associés du vecteur-accélération du point M.

EXERCICES

On supposera les espaces affines euclidiens E_2 ou E_3 rapportés à des repères orthonormés. Les axes de coordonnées sont Ox, Oy, Oz.

2. Un point M appartient à la courbe Γ d'équation $y = f(x)$, f étant dérivable deux fois en tout point d'une partie D de $\mathbb{R}$ et la loi horaire du mouvement de M est

$$\varphi : t \longmapsto x = \varphi(t)$$

dérivable deux fois sur un intervalle de temps I $(\varphi(I) \subset D)$.
Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération de M.
Soit M_1 la projection orthogonale de M sur Ox. Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération de M_1.
Application : Appliquer les résultats précédents à Γ d'équation $y = 2x^2 - x - 1$, la loi horaire étant définie par $x = \cos t$ sur $\mathbb{R}$.

3. Un point M de E_3 appartient à la droite de représentation paramétrique définie par

$$\begin{cases} x = 2 + u \\ y = 5 - 2u \\ z = 4u, \end{cases}$$

le paramètre u décrivant $\mathbb{R}$, et la loi horaire est définie par $u = 2\sin t$ sur $\mathbb{R}$.
Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération de M. Quel est l'hodographe du mouvement de M?

4. 10 MOUVEMENT UNIFORME, ACCÉLÉRÉ OU RETARDÉ

a) Mouvement uniforme.

Définition.

Soit le mouvement d'un point M de E_n, par rapport à un repère $\mathcal{R}$ d'origine O, déterminé par F : $t \longmapsto \overrightarrow{OM} = F(t)$ dérivable sur un intervalle de temps I. On dit que le mouvement de M est uniforme sur I si et seulement si la norme du vecteur-vitesse de M est constante sur I.

Cas particulier. Examinons le cas où cette constante est nulle sur I. Dans $\mathcal{E}_3$ par exemple (on raisonnera de même dans $\mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1$) rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si l'on a $F(t) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\,\vec{j} + h(t)\,\vec{k}$, f, g, h étant des fonctions numériques dérivables sur I, la norme du vecteur-vitesse de M en tout point t de I est :

$$\| F'(t) \| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

elle ne peut être nulle sur I que si $f'(t) = g'(t) = h'(t) = 0$ en tout point t de I c'est-à-dire seulement si f, g, h sont des fonctions constantes sur I (cf. § 3.1 c). Le point M est *fixe* par rapport au repère $\mathcal{R}$. *Nous écarterons ce cas particulier dans la suite.*

Si l'on suppose F *dérivable deux fois sur* I. Soit $\vec{v} = F'(t)$ et $\vec{\gamma} = F''(t)$ le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération de M en tout point t de I. On sait (cf. § 4.7 a) que la fonction :

$t \longmapsto \|\vec{v}\| = \|F'(t)\|$ est constante sur I si et seulement si la dérivée de la fonction :
$t \longmapsto F'(t)$ est un vecteur orthogonal au vecteur $F'(t)$ en tout point t de I c'est-à-dire

si et seulement si $\vec{\gamma} = F''(t)$ est orthogonal au vecteur $\vec{v} = F'(t)$ en tout point t de I. On peut énoncer :

Théorème.

Soit le mouvement d'un point M de E_n, par rapport à un repère $\mathcal{R}$ d'origine O, déterminé par $F : t \longmapsto \overrightarrow{OM} = F(t)$ dérivable deux fois sur un intervalle de temps I. Le mouvement de M est uniforme sur I si et seulement si son vecteur-vitesse et son vecteur-accélération sont orthogonaux en tout point t de I.

Exemples

1. Mouvement rectiligne uniforme.

Ce mouvement a déjà été étudié en classe de Première. Soit un point M d'abscisse x sur un axe de repère $(O, \vec{i})$, la loi horaire de son mouvement étant $f : t \longrightarrow x = f(t)$ définie sur un intervalle de temps I. Cette fonction s'appelle aussi la fonction espace. Supposons f dérivable deux fois sur I. En tout point t de I, le vecteur-vitesse de M est $\vec{v} = f'(t)\,\vec{i}$ et le vecteur-accélération de M est $\vec{\gamma} = f''(t)\,\vec{i}$. La norme euclidienne de $\vec{v}$ est

$$\|\vec{v}\| = |f'(t)|.$$

Le mouvement de M est uniforme sur I si et seulement si $\|\vec{v}\|$ est constante sur I c'est-à-dire si et seulement si la mesure algébrique $f'(t)$ du vecteur-vitesse de M est une constante sur I (cette constante n'étant pas nulle car si elle est nulle, f est constante sur I et M est fixe).

On peut aussi écrire pour toute fonction f dérivable deux fois sur I (cf. § 3.1 c) :

$$(f' \text{ constante sur I}) \Longleftrightarrow [(\forall t \in I) \quad f''(t) = 0]$$

donc le mouvement de M est uniforme sur I si et seulement la mesure algébrique $f''(t)$ du vecteur-accélération de M est nulle quel que soit t de I.

Si le mouvement de M est uniforme sur I, la mesure algébrique du vecteur-vitesse de M étant $f'(t) = a \neq 0$ pour tout t de I, cherchons à déterminer la loi horaire f. Pour cela, cherchons toutes les fonctions f dérivables sur I telles que $f'(t) = a$ pour tout t de I. Une fonction répondant à la question est la fonction g telle que :

$$(\forall t \in I) \qquad g(t) = at;$$

pour tout t de I on a $g'(t) = a$ d'où $f'(t) - g'(t) = 0$ par suite (cf. § 3.1 c) $f - g$ est constante sur I; il existe donc un nombre réel b tel que, pour tout t de I, $f(t) - g(t) = f(t) - at = b$; on a donc

$$(\forall t \in I) \qquad f(t) = at + b \qquad \text{avec } a \neq 0.$$

Réciproquement si l'on a, pour tout t de I, $f(t) = at + b \quad (a \neq 0)$, on a bien $f'(t) = a$ et le mouvement de M est uniforme.

En résumé on peut dire que le mouvement rectiligne d'un point M d'abscisse x sur un axe, de loi horaire $f : t \longmapsto x = f(t)$ dérivable deux fois sur un intervalle de temps I, est uniforme si et seulement si l'on a l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

1. La mesure algébrique du vecteur-vitesse de M est une constante non nulle sur I.

2. La mesure algébrique du vecteur-accélération de M est nulle sur I.

3. La loi horaire $f : t \longmapsto x = f(t)$ est une fonction affine non constante sur I.

2. Mouvement circulaire uniforme.

Dans E_2 orienté, rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de sens positif, soit le mouvement circulaire d'un point M défini par

- une loi horaire $\varphi : t \longmapsto \theta = \varphi(t)$ dérivable deux fois sur I
- la fonction vectorielle $F : \theta \longmapsto \overrightarrow{OM} = R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ le repère orthonormé de sens positif tel que θ soit une détermination de l'angle de $\vec{i}$ et $\vec{i_1}$. On a vu (cf. § 4.7 c) que le vecteur-vitesse de M, à tout instant t de I, est :

$$\vec{v} = R\,\theta'\,\vec{j_1}$$

d'où

$$\|\vec{v}\| = R\,|\theta'|$$

qui sera constante sur I si et seulement la vitesse angulaire θ' est une constante sur I. Nous désignerons cette constante par ω. On a encore $\omega \neq 0$ car pour $\omega = 0$, φ est constante sur I et le point M est fixe sur le cercle; nous écartons ce cas particulier.

D'après le théorème relatif à un mouvement uniforme que nous avons donné, on peut dire aussi que le mouvement de M est uniforme si et seulement si le vecteur-accélération de M est orthogonal au vecteur-vitesse de M ou encore si et seulement si l'accélération tangentielle est nulle, quel que soit t de I.

On peut dire enfin que le mouvement de M est uniforme sur I si et seulement si

$$(\forall t \in I) \qquad \theta = \omega t + \theta_0,$$

θ_0 étant un nombre réel donné arbitraire (le raisonnement est le même que pour un mouvement rectiligne uniforme : on remplacera $f'(t) = a$ par $\varphi'(t) = \omega$). Pour $t = 0$, on a $\theta = \theta_0$.

En résumé (on observera les analogies avec un mouvement rectiligne uniforme) le mouvement circulaire précédemment défini est uniforme si et seulement si l'on a l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

1. La vitesse angulaire est une constante non nulle sur I.

2. L'accélération tangentielle est nulle sur I.

3. La loi horaire $\varphi : t \longmapsto \theta = \varphi(t)$ est une fonction affine non constante sur I.

Si le mouvement circulaire est uniforme, les formules données aux paragraphes 4.7 c et 4.9 b deviennent, pour tout t de I :

$$v = R\,\omega$$
$$\gamma_n = R\,\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

on peut aussi écrire

$$\vec{\gamma} = -\,\omega^2\,\overrightarrow{OM}$$

$\vec{\gamma}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ et le bi-point représentant $\vec{\gamma}$ d'origine M est dirigé vers le centre du cercle.

Si la loi horaire φ est définie par $\theta = \omega t + \theta_0$ sur $\mathbb{R}$, on peut écrire :

$$(\forall \theta \in \mathbb{R}) \qquad F(\theta + 2\pi) = F(\theta)$$

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad (F \circ \varphi)\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = (F \circ \varphi)(t),$$

on dit que le mouvement est *périodique*, sa période étant $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

3. Mouvement hélicoïdal uniforme.

Dans E_3 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit le mouvement hélicoïdal d'un point M défini par
- une loi horaire φ : $t \longmapsto \theta = \varphi(t)$ dérivable deux fois sur I
- la fonction vectorielle F : $\theta \longmapsto \overrightarrow{OM} = R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j} + h\,\theta\,\vec{k}$ définie sur $\mathbb{R}$ ($R > 0$ et $h \neq 0$ donnés).

Si l'on suppose le plan affine (xOy) orienté, le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant de sens positif, soit $(O, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ le repère orthonormé de sens positif tel que θ soit une détermination de l'angle de $\vec{i}$ et de $\vec{i_1}$. On a vu (cf. § 4.7c) que le vecteur-vitesse de M, à tout instant t de I, est :

$$\vec{v} = R\,\theta'\,\vec{j_1} + h\,\theta'\,\vec{k}$$

d'où
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2\theta'^2 + h^2\theta'^2} = \sqrt{R^2 + h^2}\,|\theta'|$$

qui sera constante sur I si et seulement si la vitesse angulaire θ' est une constante sur I. Comme précédemment, nous désignerons cette constante par $\omega \neq 0$ et l'on peut énoncer les mêmes résultats 1, 2, 3 donnés dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

Soient M_1 et M_2 les projections orthogonales de M respectivement sur (xOy) et Oz (se reporter à la figure 13), M_1 a un mouvement circulaire sur le cercle du plan (xOy) de centre O et de rayon R suivant la loi horaire φ : $t \longmapsto \theta = \varphi(t)$ et M_2 a un mouvement rectiligne sur l'axe Oz suivant la loi horaire : $t \longmapsto z = h\,\varphi(t)$ et l'on peut dire que M a un mouvement hélicoïdal uniforme dans l'intervalle de temps I si et seulement si M_1 a un mouvement circulaire uniforme ou encore si et seulement si M_2 a un mouvement rectiligne uniforme, dans le même intervalle de temps I.

S'il en est ainsi, les formules données aux paragraphes 4.7 c et 4.9 b deviennent, pour tout t de I, $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ étant le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération de M :

$$\vec{v} = R\,\omega\,\vec{j_1} + h\,\omega\,\vec{k}$$
$$\vec{\gamma} = -R\,\omega^2\,\vec{i_1} = -\omega^2\,\overrightarrow{OM_1}$$

EXERCICES

1. Dans E_2 rapporté à un repère orthonormé, les coordonnées de M sont
$$\begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$$
à tout instant t de $[0, 2\pi]$.
Montrer que M a un mouvement circulaire uniforme.
Quel est l'hodographe du mouvement?

2. Trouver l'hodographe d'un mouvement hélicoïdal uniforme.

b) Mouvement accéléré. Mouvement retardé.

Définitions.

Soit le mouvement d'un point M de E_n, par rapport à un repère $\mathcal{R}$ d'origine O, déterminé par F : $t \longmapsto \overrightarrow{OM} = F(t)$ dérivable sur un intervalle de temps I.
On dit que le mouvement de M est accéléré sur I si et seulement si la norme du vecteur-vitesse de M est strictement croissante sur I.
On dit que le mouvement de M est retardé (ou décéléré) sur I si et seulement si la norme du vecteur-vitesse de M est strictement décroissante sur I.

Si l'on suppose F *dérivable deux fois sur* I. Soit $\vec{v} = F'(t)$ et $\vec{\gamma} = F''(t)$ le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération de M en tout point t de I. On peut écrire les équivalences logiques suivantes, pour toute fonction vectorielle F dérivable deux fois sur I :

$$[\|F'(t)\| \text{ croît strictement sur I}] \iff [(F'(t))^2 \text{ croît strictement sur I}]$$
$$\iff [(\forall t \in I)\quad 2\,F'(t).\,F''(t) \geqslant 0] \quad (\text{cf. § 3.1 c})$$
$$\iff [(\forall t \in I)\quad \vec{v}.\vec{\gamma} \geqslant 0],$$

la nullité du produit scalaire n'ayant lieu qu'en des points isolés de I.

On démontrera de même que $\|F'(t)\|$ décroît strictement sur I si et seulement si $\vec{v}.\vec{\gamma} \leqslant 0$ en tout point t de I, la nullité du produit scalaire n'ayant lieu qu'en des points isolés de I. Concluons :

Théorème.

Soit le mouvement d'un point M de E_n, par rapport à un repère $\mathcal{R}$ d'origine O, déterminé par F : $t \longmapsto \overrightarrow{OM} = F(t)$ dérivable deux fois sur un intervalle de temps I
Le mouvement de M est accéléré (resp. retardé) sur I si et seulement si $\vec{v}.\vec{\gamma} \geqslant 0$ (resp. $\vec{v}.\vec{\gamma} \leqslant 0$) en tout point t de I (la nullité du produit scalaire n'ayant lieu qu'en des points isolés de I).

Exercice résolu.

Dans E_2 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le mouvement d'un point M (x, y) est défini par

$$(1) \quad \begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = b\sin\omega t, \end{cases}$$

a, b, ω sont donnés strictement positifs, $a > b$, la date t décrit $\mathbb{R}$.

Trajectoire. En posant $\theta = \omega t$, on reconnaît la représentation paramétrique d'une ellipse (cf. § 4.6 b). Cherchons l'équation cartésienne de la trajectoire. Si M est un point quelconque de coordonnées définies par (1), on a

$$\cos\omega t = \frac{x}{a}$$
$$\sin\omega t = \frac{y}{b}$$

et, puisque $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$, les coordonnées de M vérifient la relation :

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Réciproquement soit M (x, y) un point dont les coordonnées vérifient (2). Au couple $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$, on sait associer une infinité de nombres réels θ appartenant à une même classe de $\mathbb{R}$ modulo 2π tels que

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{a} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

et pour tout instant t tel que $\theta = \omega t$ c'est-à-dire tel que $t = \frac{\theta}{\omega}$, on a

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = b \sin \omega t, \end{cases}$$

donc les coordonnées de M vérifient (1).

L'ensemble des points M (x, y) tels qu'on ait (1) quand t décrit $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points M (x, y) tels qu'on ait (2). L'équation cartésienne de la trajectoire Γ de M est (2).

Si $a = b$, Γ est un cercle de centre O et de rayon a.

Si $a \neq b$, construisons cet ensemble. On peut écrire pour tout couple (x, y) de réels :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \iff \left\{ \begin{array}{ll} y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} & (3) \\ \text{ou} & \\ y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} & (4) \end{array} \right.$$

l'ensemble défini par (4) se déduit de celui défini par (3) par symétrie par rapport à Ox; la fonction f : $x \longmapsto y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ n'est définie que pour $-a \leqslant x \leqslant a$ et cette fonction est paire donc l'ensemble défini par (3) admet Oy comme axe de symétrie. Il suffit alors de faire varier x de 0 à a.

$$f'(x) = -\frac{b}{a^2} \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

x	0		a
$f'(x)$	0		
$f(x)$	b	↘	0

$f'(0) = 0$ donc Γ admet une tangente en B $(0, b)$ parallèle à Ox. Soit A $(a, 0)$ et M (x, y) un point quelconque de Γ distinct de A et tel que $y > 0$, le coefficient directeur de la droite (AM) est

$$m(x) = \frac{f(x) - 0}{x - a} = \frac{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{x - a}$$

$$= -\frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a - x} = -\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}$$

$$\lim_{x \to a-0} m(x) = -\infty$$

donc l'ellipse Γ admet une tangente en A parallèle à Oy. On achève le tracé de Γ par symétries par rapport aux axes de coordonnées (fig. 14).

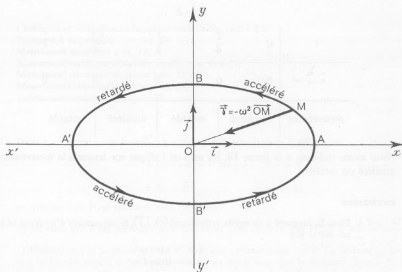


Fig. 14

Étude du mouvement. Le mouvement de M, par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, est déterminé par la fonction vectorielle F : $t \longmapsto \overrightarrow{OM} = a \cos \omega t\, \vec{i} + b \sin \omega t\, \vec{j}$ définie sur $\mathbb{R}$. On remarque que

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad F\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = F(t)$$

donc le mouvement est périodique, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (rappelons que l'on a supposé $\omega > 0$). Il suffit donc d'étudier le mouvement pendant une période. Faisons varier t de 0 à T.

Le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération de M, à l'instant t, sont :

$$\vec{v} = -a\omega \sin \omega t\, \vec{i} + b\,\omega \cos \omega t\, \vec{j}$$
$$\vec{\gamma} = -a\omega^2 \cos \omega t\, \vec{i} - b\omega^2 \sin \omega t\, \vec{j}$$

nous remarquons qu'à tout instant t de $\mathbb{R}$, on a

$$\vec{\gamma} = -\omega^2\, \overrightarrow{OM}$$

nous avons trouvé le même résultat dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme (cf. § 4.10 a). D'une façon générale lorsque $\vec{\gamma}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires sur un intervalle de temps I (c'est-à-dire que si F : $t \longmapsto \overrightarrow{OM} = F(t)$ est dérivable deux fois sur I, $\vec{\gamma}$ est de la forme $\vec{\gamma} = \lambda(t)\, \overrightarrow{OM}$), on dit que M a un **mouvement à accélération centrale** sur I.

Déterminons les intervalles dans lesquels le mouvement est accéléré ou retardé :

$$\vec{v} \cdot \vec{\gamma} = (a^2 - b^2)\, \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\, \omega^3 \sin 2\, \omega t$$

Nous avons indiqué le signe du produit scalaire dans le tableau suivant, en supposant $a > b$.

t	0		$\frac{T}{4}$		$\frac{T}{2}$		$\frac{3T}{4}$		T
$\vec{v} \cdot \vec{\gamma}$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
mouvement		accéléré		retardé		accéléré		retardé	

Nous avons indiqué, à la figure 14, les arcs de l'ellipse sur lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.

EXERCICES

1. Dans E_2 rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le mouvement d'un point M (x, y) est défini par

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \cos 2 \omega t \end{cases}$$

($a > 0$, $\omega > 0$ donnés, t décrit $\mathbb{R}$).
Trouver l'équation cartésienne de la courbe contenant la trajectoire. Construire la trajectoire. Indiquer les intervalles de temps et les arcs de la trajectoire correspondant à un mouvement accéléré ou retardé.

2. Un point M appartient à la courbe d'équation $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ et la loi horaire de son mouvement est définie par $x = 2t$ sur $\mathbb{R}$.
Construire la trajectoire (le repère étant toujours orthonormé). Indiquer les intervalles de temps et les arcs de la trajectoire correspondant à un mouvement accéléré ou retardé.



EXERCICES

Continuité et dérivation de fonctions vectorielles : ex. 1 à 5.
Tangente à une courbe : ex. 6 à 17.
Mouvement rectiligne : ex. 18.
Mouvement rectiligne vibratoire simple : ex. 19 à 21.
Mouvement circulaire uniforme : ex. 21 à 23.
Mouvement hélicoïdal uniforme : ex. 24.
Autres mouvements : ex. 25-26-27.

4.1 Dans $\mathcal{E}_2$ rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$, soit la fonction vectorielle F définie par

$$F(t) = t\vec{i} + t^2 \sin \frac{1}{t} \vec{j} \quad \text{si } t \neq 0$$

$$F(0) = \vec{0} \quad \text{si } t = 0.$$

a) Montrer que F est continue pour tout t réel.

b) Montrer que F est dérivable pour tout t réel. $\left[\text{On rappelle que } F'(0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{F(t) - F(0)}{t}\right]$.

c) Montrer que la fonction dérivée F′ n'est pas continue pour $t = 0$. En déduire qu'une fonction vectorielle F peut avoir une dérivée en un point sans que la fonction dérivée F′ ait une limite en ce point. (On rapprochera cet exercice de l'exercice 2-24.)

Dans $\mathcal{E}_2$ rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$ ou dans $\mathcal{E}_3$ rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, chercher si les fonctions vectorielles suivantes ont une dérivée au point t et calculer éventuellement cette dérivée (ex. 2 à 5) :

4.2 $F(t) = t^2 \vec{i} + E(t) \vec{j}$, $E(t)$ est la partie entière de t.

4.3 $F(t) = \sqrt{4 - t^2}\, \vec{i} + \dfrac{1}{t} \vec{j} + \dfrac{1 + t}{1 - t} \vec{k}$.

4.4 $F(t) = \dfrac{1 - \sin t}{1 + \sin t} \vec{i} + \sqrt{4 \sin^2 t - 1}\, \vec{j} + \sin t\, \vec{k}$.

4.5 $F(t) = |t(t + 1)|\, \vec{i} + |t^2 - 2t|\, \vec{j}$.

Dans les espaces affines euclidiens E_2 ou E_3 rapportés à des repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ou $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, examiner si les ensembles suivants ont une tangente et former l'équation (ou les équations) de cette tangente, quand elle existe (ex. 6 à 9) :

4.6 $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t^2 + 1} \\ y = \dfrac{t^2 + 2}{t + 1} \end{cases}$ pour $t = 0$; pour $t = 1$.

4.7 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \dfrac{1}{1 - t} \end{cases}$ pour $t = 0$; pour $t = 2$.

4.8 $\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$ pour $t = 0$; pour $t = \dfrac{\pi}{4}$.

4.9 $\begin{cases} x = t^2 + t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = \dfrac{1}{k} \end{cases}$ pour $t = 1$; pour $t = -\dfrac{1}{2}$.

4.10 Soit l'ellipse Γ de représentation paramétrique définie sur ℝ par :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

($a > b > 0$ et le plan affine euclidien E_2 est rapporté à un repère orthonormé).

1° Former l'équation de la tangente à Γ au point M de Γ associé à une valeur quelconque du paramètre θ.

2° Soit T et T′ les tangentes à Γ respectivement en A $(a, 0)$ et A′ $(-a, 0)$. Si $\theta \neq k\pi$, la tangente en M à Γ coupe T et T′ respectivement en P et P′. Montrer que $\overline{AP}.\overline{A'P'}$ est constant.

3° Soit F et F′ les points de Ox d'abscisses respectives $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et $-c = -\sqrt{a^2 - b^2}$. Montrer que les droites (FP) et (FP′) sont perpendiculaires, ainsi que les droites (F′P) et (F′P′).

On suppose les espaces affines euclidiens E_2 ou E_3 rapportés à des repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ou $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On se propose de démontrer sur des exemples que, si $F'(t_0) = \vec{0}$ et si $F''(t_0) \neq \vec{0}$, la courbe Γ admet une tangente au point associé à t_0, de vecteur directeur $F''(t_0)$ (ex. 11 à 14) :

4.11 $$F(t) = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2}\right)\vec{j}, \quad t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1° Calculer $F'(0)$.

2° Soit Γ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = F(t)$. Montrer que Γ admet une tangente en O [on cherchera un vecteur directeur $\Phi(t)$ simple de la droite (OM) et on cherchera sa limite quand t tend vers 0].

3° Montrer que $F''(0)$ est aussi un vecteur directeur de cette tangente.

4.12 Mêmes questions avec $F(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}\vec{i} + \dfrac{t^3}{1+t^2}\vec{j}$ pour $t = 0$.

4.13 Mêmes questions avec $F(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j} + t^4\vec{k}$ pour $t = 0$.

4.14 $$F(t) = \left(t^2 + \frac{2}{t}\right)\vec{i} + \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\vec{j}, \quad t \text{ décrit } \mathbb{R}^*.$$

1° Calculer $F'(1)$.

2° Soit $\overrightarrow{OM_0} = F(1)$, $\overrightarrow{OM} = F(t)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{M_0M}$. En posant $t = 1 + h$, trouver un vecteur directeur $\Phi(h)$ simple de la droite (M_0M) et montrer que l'ensemble Γ des points M admet une tangente en M_0.

3° Montrer que $F''(1)$ est aussi un vecteur directeur de cette tangente.

4.15 $$F(t) = \frac{2t}{1+t^2}\vec{i} + \frac{t+2}{1-t^2}\vec{j}, \quad t \text{ décrit } \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

1° Calculer $\lim\limits_{|t| \to +\infty} F$.

2° Soit Γ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = F(t)$.

En posant $t = \dfrac{1}{\theta}$, trouver une représentation paramétrique de Γ ∪ {O}. Montrer que cet ensemble admet une tangente en O.

4.16 $$F(t) = \frac{1}{t^2}\vec{i} + \frac{2t-1}{t+1}\vec{j}, \quad t \text{ décrit } \mathbb{R} - \{-1, 0\}.$$

1° Calculer $\lim\limits_{|t| \to +\infty} F$.

2° Soit Γ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = F(t)$. Soit $\overrightarrow{OA} = \lim\limits_{|t| \to +\infty} F$. En posant $t = \dfrac{1}{\theta}$, trouver une représentation paramétrique de Γ ∪ {A}. Montrer que cet ensemble admet une tangente en A.

4.17 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit F la fonction vectorielle de la variable réelle t telle que

$$F(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + \frac{2t}{t-1}\vec{j} + \left(\frac{t}{t-1}\right)^2\vec{k}.$$

1° Quel est l'ensemble D des valeurs de t sur lequel la fonction F est définie? Calculer $F'(t)$. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $F\left(\frac{1}{2}\right)$, $F'\left(\frac{1}{2}\right)$, $F(-1)$ et $F'(-1)$?

2° *a*) Au nombre t, appartenant à D, on fait correspondre le point M de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = F(t)$.

Soit (𝒞) l'ensemble des points M ainsi obtenus lorsque t décrit D.

Soit λ un paramètre réel; discuter suivant les valeurs de λ le nombre des points d'intersection de (𝒞) avec le plan d'équation $z = \lambda$.

Quel est l'ensemble (ℒ) des valeurs de λ pour lesquelles le plan $z = \lambda$ coupe (𝒞) en deux points M′ et M″?

b) Pour λ donné dans (ℒ), calculer :

$$M'M''^2 = \varphi(\lambda).$$

($M'M''^2$ est le carré de la distance des deux points M′ et M″). Étudier les variations de la fonction φ ainsi définie sur (ℒ); en particulier, montrer qu'elle admet un minimum et donner la valeur λ_0 de λ pour laquelle ce minimum est atteint.

c) A tout λ, appartenant à (ℒ), on fait correspondre le milieu I du segment [M′, M″]; quel est l'ensemble des points I ainsi obtenus?

3° Soit $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ les projections orthogonales respectives de (𝒞) sur les plans xOy et yOz. Trouver les équations cartésiennes $y = f_1(x)$ de $(\mathcal{C}_1)$ et $z = f_2(y)$ de $(\mathcal{C}_2)$. Quelle est la nature de chacune des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$?

Retrouver les paramètres directeurs de la tangente à (𝒞) au point correspondant à $t = \dfrac{1}{2}$ obtenus à la question 1).

4° Montrer que, lorsque t tend vers $+\infty$, $F(t)$ tend vers une limite $\vec{W}$, dont on calculera les coordonnées. Même étude lorsque t tend vers $-\infty$.

Soit A le point de l'espace tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{W}$. Montrer que la courbe (𝒞) ∪ {A} admet une tangente en A; donner les coordonnées d'un vecteur directeur de cette tangente.

(Bacc., C, Rennes, septembre 1970.)

4.18 Bien que le problème soit essentiellement un problème de cinématique et de géométrie analytique, la figure qui accompagnera la solution sera une épure et devra être faite avec soin. On pourra utiliser, pour la construire, soit une feuille intercalaire, soit une feuille de papier millimétrique de format analogue. La ligne de terre $y'Oy$ est le petit axe de la feuille. L'origine O des axes de coordonnées est à 1 cm environ du bord gauche de la feuille. Le sens positif de l'axe des éloignements $x'Ox$ est, sur l'épure, dirigé de haut en bas; le sens positif, sur l'axe des profils $y'Oy$, est de gauche à droite; le sens positif, sur l'axe des cotes $z'Oz$, est de bas en haut. Les coordonnées sont indiquées relativement au système d'axes précédent. L'unité de longueur est le centimètre. L'unité de temps est la seconde.

1° Un point mobile A, dont la position dépend de l'instant t, a pour coordonnées x_A, y_A, z_A qui vérifient le système de relations :

$$x_A - 2 = y_A - z_A = z_A - t^2 - 1 = 0.$$

Un point mobile B est tel que la droite (AB) reste horizontale et ses coordonnées x_B, y_B, z_B vérifient le système de relations

$$x_B - 5 = 2\,y_B + z_B - 18 = 0.$$

a) Déterminer, en fonction de t, les coordonnées de chacun des points A et B.

b) Construire l'épure de la trajectoire D_1 de A et l'épure de la trajectoire D_2 de B.

c) Montrer qu'il existe deux valeurs de t (on notera t_1' celle qui est positive et t_1'' l'autre) pour lesquelles la droite (AB) est de bout. Montrer que, pour ces deux valeurs de t, la droite (AB) occupe une même position qui sera notée (A_1B_1). Indiquer les coordonnées de A_1 et B_1. Construire l'épure de la droite (A_1B_1).

2° A_0 et B_0 étant les positions respectives des points A et B à l'instant 0, soit M_0, M_1 et M les milieux respectifs des segments $[A_0, B_0]$, $[A_1, B_1]$ et [A, B].
Déterminer les équations cartésiennes des projections de la trajectoire de M. Construire l'épure de cette trajectoire. Déterminer, à l'instant t, les coordonnées (ou composantes scalaires) du vecteur-vitesse du point M à l'instant t.
Représenter sur l'épure ce vecteur à l'instant 0, à l'instant t_1' et à l'instant t_1''. Déduire de ce qui précède l'hodographe, relativement au point O, du mouvement de M (épure et équations de ses projections).

3° Montrer que la projection horizontale (*ab*) de la droite (AB) passe par un point fixe.
On note H la projection orthogonale de M_1 sur (AB) et h la projection horizontale de H. Trouver le lieu géométrique de h (c'est-à-dire l'ensemble décrit par le point h lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$).

N.-B. Les candidats sont informés que, sauf en ce qui concerne les notations, le 3° du problème est indépendant du 2°. (Bacc. E, Clermont, juin 1970.)

4.19 Dans le plan (affine euclidien) rapporté à un repère orthonormé, un point M a pour coordonnées à l'instant t (t réel quelconque) :

$$x = a\cos^2 \omega t, \qquad y = b \sin^2 \omega t$$

(ω constante positive, a et b constantes non toutes deux nulles).

1° Montrer que la trajectoire de M est incluse dans une droite dont on déterminera l'équation cartésienne.

2° Montrer que M a un mouvement rectiligne vibratoire simple dont on déterminera le centre, l'amplitude et la période.

4.20 Mêmes questions avec

$$x = a\cos\omega t \quad , \quad y = a\cos^2\frac{\omega t}{2}.$$

4.21 Le plan affine euclidien étant orienté et rapporté à un repère orthonormé de sens positif, soit les points A, B, C de l'axe $x'Ox$ d'abscisses respectives a, $-a$, $2a$ ($a > 0$ donné). La date t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

1° Un point P a un mouvement circulaire uniforme sur le cercle de centre A et de rayon a, de vitesse angulaire positive constante ω. A l'instant $t = 0$, le point P se trouve en C. Un point Q a un mouvement circulaire uniforme sur le cercle de centre B et de rayon a, de vitesse angulaire négative constante $-\omega$. A l'instant $t = 0$, le point Q se trouve en Q_0 tel qu'une détermination de $(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BQ_0}})$ soit $+\frac{\pi}{2}$. Calculer, en fonction de t, les coordonnées de P, Q et du milieu M du segment [P, Q]. Montrer que le point M a un mouvement rectiligne vibratoire simple dont on déterminera le centre, l'amplitude et la période.

2° Un point S a un mouvement circulaire uniforme sur le cercle de centre C et de rayon $2a$ avec la vitesse angulaire constante $-\omega$. A l'instant $t = 0$, le point S se trouve en O. Le point Q ayant le mouvement circulaire précédent, soit N le point qui divise le segment [S, Q] dans le rapport $\frac{\overline{NS}}{\overline{NQ}} = -2$. Calculer les coordonnées du point N et montrer que N a un mouvement circulaire uniforme.

4.22 Dans l'espace (affine euclidien) E_3 rapporté à un repère orthonormé, soit le point M de coordonnées à tout instant t de $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cos\omega t \\ y = 3 + 2\sin\omega t \\ z = 2. \end{cases}$$

Quelle est la nature du mouvement de M ?

4.23 1° Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, les coordonnées x, y d'un point mobile M sont données, à chaque instant t de $\mathbb{R}$, par

$$\begin{cases} x = 1 + 2\cos^2 t \\ y = 2\sin t\cos t. \end{cases}$$

Montrer que la trajectoire de M est un cercle C décrit d'un mouvement uniforme. Écrire, en fonction de t, l'équation de la tangente en M à C.

2° On appelle transformé du point M (x, y) appartenant à C le point M′ (X ,Y) défini par les deux conditions suivantes :

a) OM′ est perpendiculaire à la tangente en M à C;

b) le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$ est égal à 3.
Soit Γ l'ensemble des points M′. Établir que les coordonnées X, Y de M′ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} X(2 + \cos 2t) + Y\sin 2t = 3, \\ X\sin 2t - Y\cos 2t = 0. \end{cases}$$

Former l'équation cartésienne de Γ. Montrer que Γ est une hyperbole (cf. § 3.6, ex. 4. Remarque).

3° Exprimer les coordonnées X, Y de M′ en fonction de t. Déterminer un système de paramètres directeurs de la tangente en M′ à Γ. Montrer que cette tangente est perpendiculaire à la droite OM en un point m; vérifier que ce point m appartient au cercle C.

4° On donne à t deux valeurs t_1 et t_2 qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$. Montrer que les points correspondants M_1 et M_2 sont diamétralement opposés sur C et que leurs transformés M_1' et M_2' sont alignés avec O.
Soit P le conjugué harmonique de O par rapport à M_1' et M_2', S l'intersection des tangentes à Γ en ces points. Établir que, lorsque t_1 et t_2 varient, leur différence restant égale à $\frac{\pi}{2}$, P et S se déplacent sur une même droite fixe. (Bacc. C et E, Aix, Marseille, juin 1964.)

4.24 L'espace étant rapporté à un repère orthonormé, on considère le point mobile M de coordonnées :

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = at.$$

(a constante positive, t désigne le temps variant de $-\infty$ à $+\infty$).

1° Quelle est la nature du mouvement de M ? Calculer l'angle que fait la tangente à la trajectoire avec Oz. Quel est l'hodographe du mouvement ? Calculer les coordonnées du vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ de M à l'instant t. Construire le bi-point représentant $\vec{\gamma}$ d'origine M.

2° Construire les courbes décrites par les projections orthogonales de M sur les trois plans de coordonnées.

3° On mène par M la droite de vecteur directeur (0, 1, 1). Elle coupe le plan xOy en P. Calculer les coordonnées $x_1 = f(t)$ et $y_1 = g(t)$ du point P.
Quand t décrit $[0, \pi]$ étudier le sens de variation des fonctions f et g. En déduire le sens de variation de la fonction : $x_1 \longmapsto y_1$ qui associe à l'abscisse x_1 de P son ordonnée y_1.
Construire la partie de la trajectoire de P quand t décrit $[0, \pi]$ en indiquant les tangentes aux extrémités de l'arc obtenu (pour $t = 0$, le vecteur-vitesse de P est nul, on admettra que la courbe a une tangente de vecteur directeur le vecteur-accélération de P s'il n'est pas nul; cf. ex. 11 à 14).
En déduire les autres parties de la trajectoire de P.

4.25 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, les coordonnées d'un point M mobile sont données, en fonction du temps, par

$$x = 5 \cos t, \qquad y = 4 \sin t.$$

1° Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire (C) du mobile. Quelle est la nature géométrique de cette trajectoire? (On suppose que t varie de $-\infty$ à $+\infty$).

2° Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{v}$ du mobile à l'instant t. Écrire l'équation de la tangente en M à (C).

3° Soit F le point de coordonnées $x = 3$, $y = 0$. On appelle P le point d'intersection (s'il existe) de la perpendiculaire en F à la droite (FM) avec la tangente à (C) au point M. Quel est l'ensemble décrit par P quand M parcourt sa trajectoire? (Bacc. D, Montpellier, septembre 1969).

4.26 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, un point M appartient à la courbe (C) d'équation $y = \dfrac{1 - x}{1 - 2x + 2x^2}$ et la loi horaire de son mouvement est définie sur $\mathbb{R}$ par $x = vt$ ($v > 0$ donné).

1° Construire la trajectoire du point M. Montrer qu'elle a trois points d'inflexion alignés.

2° Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{v}$ et du vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ de M à l'instant t. Construire l'hodographe du mouvement de M, en indiquant comment il est décrit quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$.
Indiquer les intervalles de temps et les arcs de la trajectoire correspondant à un mouvement accéléré ou retardé.

En quels points de (C), a-t-on $\vec{\gamma} = \vec{0}$? (Baccalauréat.)

4.27 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le mouvement d'un point M est défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : t \longmapsto \overrightarrow{OM} = F(t) = R(t - \sin t)\,\vec{i} + R(1 - \cos t)\,\vec{j}.$$

($R > 0$ donné).

1° Montrer que, si k est un entier relatif quelconque, pour tout t réel, on a :

$$F(t + k\,2\pi) = F(t) + k\,2\pi R\,\vec{i}.$$

Qu'en concluez-vous pour les points M et M′ associés à t et à $t + k\,2\pi$? En déduire que pour construire la trajectoire de M, on peut se borner à faire varier t dans un intervalle d'amplitude 2π.
Que peut-on dire des points M et M″ associés à t et à $2\pi - t$? En déduire que pour construire la trajectoire de M, on peut se borner à faire varier t dans l'intervalle $[0, \pi]$, les autres parties de la trajectoire s'obtenant à l'aide de transformations géométriques simples.

2° Quand t décrit $[0, \pi]$ étudier le sens de variation des fonctions :

$$t \longmapsto x = R(t - \sin t)$$
$$t \longmapsto y = R(1 - \cos t).$$

En déduire le sens de variation de la fonction : $x \longmapsto y$ qui associe à l'abscisse x de M son ordonnée y.
Construire la partie de la trajectoire de M quand t décrit $[0, \pi]$. Indiquer les tangentes aux extrémités de l'arc obtenu (pour $t = 0$, $F'(0) = \vec{0}$, on admettra que le vecteur $F''(0)$ est un vecteur directeur de la tangente; cf, ex. 11 à 14).
En déduire les autres parties de la trajectoire.

3° Soit le point m tel que $\overrightarrow{Om} = \vec{v} = F'(t)$. On sait que m décrit l'hodographe du mouvement de M relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que m a un mouvement circulaire uniforme.
Indiquer les arcs de la trajectoire de M sur lesquels le mouvement de M est accéléré ou retardé.

5| Calcul intégral

Dans la première section nous définissons et nous donnons des propriétés d'une **fonction intégrable au sens de Riemann sur un segment** *$[a, b]$ à l'aide de* **fonctions en escalier** *définies sur $[a, b]$ dont l'emploi est particulièrement adapté à cette étude. Les fonctions en escalier constituent l'outil à la fois simple et précis que nous utiliserons dans tout le chapitre aussi bien pour les questions théoriques que pour les applications pratiques.*
Dans la section II, on est conduit à la notion de **primitive** *d'une fonction. Les problèmes posés sont de deux sortes : problème d'existence d'une primitive d'une fonction sur un intervalle et problème de calcul de primitives comportant quelques techniques de calcul.*
La section III est réservée aux **applications pratiques du calcul intégral,** *qui sont nombreuses et que l'on rencontre particulièrement en Mécanique et en Physique.*

I. Intégrale au sens de Riemann d'une fonction sur un segment

5. 1. FONCTIONS EN ESCALIER

a) Définition.

Soit, par exemple, la fonction φ définie sur le segment $[1, 4]$ par :

si $1 < x < 2$, $\quad \varphi(x) = 1$
si $2 < x < 3$, $\quad \varphi(x) = 0$
si $3 < x < 4$, $\quad \varphi(x) = -2$

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = 3, \quad \varphi(3) = -1, \quad \varphi(4) = -\frac{3}{2}.$$

Nous avons la représentation graphique de φ indiquée à la figure 1.

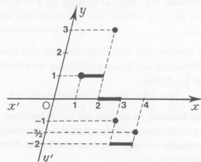


Fig. 1

On dit que φ est une fonction en escalier définie sur [1 , 4]. Plus généralement :

Définition.

On appelle fonction en escalier définie sur $[a , b]$ $(a < b)$ toute application de $[a , b]$ dans $\mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes : il existe un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}$ de $[a , b]$ tels que

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$$

et l'application est constante sur chaque intervalle ouvert $]x_i , x_{i+1}[$ $\quad (1 \leqslant i \leqslant n)$.

Cela revient à dire qu'il existe des nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$ on ait, si φ désigne cette fonction en escalier :

$$(\forall x \in]x_i , x_{i+1}[) \qquad \varphi(x) = \lambda_i$$

et, puisque φ est définie sur $[a , b]$, elle est définie aussi aux points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ c'est-à-dire qu'il existe des nombres réels $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+1}$ tels que pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ on ait : $\varphi(x_i) = \mu_i$.

b) Opérations.

Désignons par $\varepsilon_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a , b]$ $(a < b)$.
Addition. Soit φ et ψ deux fonctions en escaliers définies sur $[a , b]$. La somme $\varphi + \psi$ est la fonction numérique définie sur $[a , b]$ par :

$$(\forall x \in [a , b]) \qquad (\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Montrons que $\varphi + \psi$ est une fonction en escalier sur $[a , b]$. Puisque φ est une fonction en escalier définie sur $[a , b]$, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}$ de $[a , b]$ tels que

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n+1} = b$$

et φ est constante sur chaque intervalle $]x_i , x_{i+1}[$ $\quad (1 \leqslant i \leqslant n)$. Puisque ψ est une fonction en escalier définie sur $[a , b]$, il existe $x'_1, x'_2, \ldots, x'_j, x'_{j+1}, \ldots, x'_{p+1}$ de $[a , b]$ tels que

$$a = x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_j < x'_{j+1} < \ldots < x'_{p+1} = b$$

et ψ est constante sur chaque intervalle $]x'_j , x'_{j+1}[$ $\quad (1 \leqslant j \leqslant p)$.
La réunion des deux ensembles $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ et $\{x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}\}$ est un ensemble $\{x''_1, x''_2, \ldots, x''_k, x''_{k+1}, \ldots, x''_{q+1}\}$ tel que

$$a = x''_1 < x''_2 < \ldots < x''_k < x''_{k+1} < \ldots < x''_{q+1} = b$$

chaque intervalle $]x''_k , x''_{k+1}[$ est l'intersection d'un intervalle $]x_i , x_{i+1}[$ sur lequel φ est constante et d'un intervalle $]x'_j , x'_{j+1}[$ sur lequel ψ est constante, donc $\varphi + \psi$ est constante sur chaque intervalle $]x''_k , x''_{k+1}[$ $(1 \leqslant k \leqslant q)$, $\varphi + \psi$ est bien une fonction en escalier définie sur $[a , b]$. Il en résulte que l'addition que nous venons de définir est une loi interne sur $\varepsilon_{[a,b]}$.

Multiplication par un nombre réel. Soit k un nombre réel quelconque donné et φ une fonction en escalier définie sur $[a , b]$. Le produit $k.\varphi$ ou simplement $k\varphi$ est la fonction numérique définie sur $[a , b]$ par :

$$(\forall x \in [a , b]) \qquad (k\varphi)(x) = k\varphi(x).$$

La fonction $k\varphi$ est une fonction en escalier sur $[a , b]$ puisque, les notations étant celles qui ont été données précédemment, la fonction $k\varphi$ est constante sur chaque intervalle $]x_i , x_{i+1}[$ car φ est constante sur chacun de ces intervalles. Nous venons donc de définir une multiplication externe sur $\varepsilon_{[a,b]}$.

Si nous désignons par $(\mathcal{F}([a , b], \mathbb{R}), +, .)$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $[a , b]$, muni de l'addition des fonctions numériques et de la multiplication par un nombre réel, on sait que $(\mathcal{F}([a , b], \mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\varepsilon_{[a,b]}$ est une partie non vide de $\mathcal{F}([a , b], \mathbb{R})$ et on vient de voir que cette partie est stable pour l'addition et pour la multiplication par un nombre réel. Cela suffit (voir cours de Première) pour dire que $(\varepsilon_{[a,b]}, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}([a , b], \mathbb{R}), +, .)$. Nous pouvons énoncer :

Théorème.

L'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a , b]$, muni de l'addition des fonctions numériques et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

EXERCICES

1. Montrer que si φ et ψ sont deux fonctions en escalier définies sur $[a , b]$, la fonction $\varphi \times \psi$ ou plus simplement $\varphi\psi : x \longmapsto (\varphi\psi)(x) = \varphi(x)\,\psi(x)$ définie sur $[a , b]$, est aussi une fonction en escalier sur $[a , b]$.
Montrer que $(\varepsilon_{[a,b]}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{F}([a , b]), +, \times)$.
2. Montrer que si φ est une fonction en escalier définie sur $[a , b]$, la fonction $|\varphi|$: $x \longmapsto |\varphi(x)|$ définie sur $[a , b]$, est aussi une fonction en escalier sur $[a , b]$.

5. 2 INTÉGRALE, AU SENS DE RIEMANN, D'UNE FONCTION EN ESCALIER

a) Exemples. Définition.

1. Le graphique des vitesses d'un train en fonction du temps est le suivant (fig. 2) :

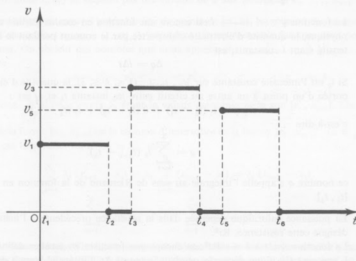


Fig. 2

La fonction φ : $t \longmapsto v$ définie sur $[t_1, t_6]$ est une fonction en escalier. Si v_i est la vitesse constante sur $]t_i, t_{i+1}[$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$, la distance parcourue entre les instants t_1 et t_6 est :

$$d = v_1(t_2 - t_1) + 0(t_3 - t_2) + v_3(t_4 - t_3) + 0(t_5 - t_4) + v_5(t_6 - t_5)$$

ce qu'on écrit sous la forme :

$$d = \sum_{i=1}^{5} v_i(t_{i+1} - t_i)$$

ce nombre d s'appelle l'intégrale au sens de Riemann de la fonction en escalier φ sur $[t_1, t_6]$.

2. Une résistance électrique est parcourue par un courant continu d'intensité i. Nous avons le graphique suivant, t désignant toujours le temps (fig. 3) :

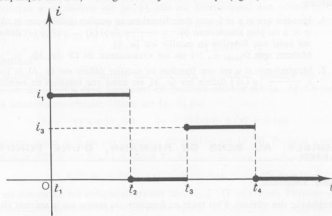


Fig. 3

La fonction φ : $t \longmapsto i$ est encore une fonction en escalier définie sur $[t_1, t_4]$. En physique, la quantité d'électricité transportée par le courant pendant le temps Δt, l'intensité étant i constante, est :

$$\Delta q = i\Delta t$$

Si i_k est l'intensité constante sur $]t_k, t_{k+1}[$ $(1 \leqslant k \leqslant 3)$, la quantité d'électricité transportée d'un point à un autre du circuit entre les instants t_1 et t_4 est :

$$q = i_1(t_2 - t_1) + 0(t_3 - t_2) + i_3(t_4 - t_3)$$

c'est-à-dire

$$q = \sum_{k=1}^{3} i_k(t_{k+1} - t_k).$$

ce nombre q s'appelle l'intégrale au sens de Riemann de la fonction en escalier φ sur $[t_1, t_4]$.

3. La puissance calorifique dépensée dans la résistance précédente à l'instant t est, si R désigne cette résistance, Ri^2.

La fonction ψ : $t \longmapsto Ri^2$ est encore une fonction en escalier définie sur $[t_1, t_4]$. L'énergie calorifique dépensée pendant le temps Δt, l'intensité étant i constante, est :

$$\Delta W = Ri^2 \Delta t$$

L'énergie calorifique dépensée entre les instants t_1 et t_4 est :

$$W = Ri_1^2(t_2 - t_1) + 0(t_3 - t_2) + Ri_3^2(t_4 - t_3)$$

c'est-à-dire

$$W = \sum_{k=1}^{3} Ri_k^2(t_{k+1} - t_k).$$

Ce nombre W est l'intégrale au sens de Riemann de la fonction en escalier ψ sur $[t_1, t_4]$. Plus généralement :

Définition.

Soit $\varepsilon_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a, b]$ $(a < b)$. Soit φ un élément quelconque de cet ensemble c'est-à-dire une fonction en escalier définie sur $[a, b]$. Il existe $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots x_{n+1}$ de $[a, b]$ tels que

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n+1} = b,$$

φ prenant une valeur constante λ_i sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
Soit l'application I_0 de $\varepsilon_{[a,b]}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\varphi \longmapsto I_0(\varphi) = \lambda_1(x_2 - x_1) + \lambda_2(x_3 - x_2) + \ldots + \lambda_n(x_{n+1} - x_n),$$

le nombre $I_0(\varphi)$ s'appelle l'**intégrale au sens de Riemann** de la fonction en escalier φ sur $[a, b]$.

On représente cette intégrale par $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_{i+1} - x_i)$ ou par le symbole

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

qui se lit « somme de a à b de $\varphi(x)\,dx$ ».

Remarques.

1. Le nombre $I_0(\varphi)$ ne dépend pas des valeurs de φ aux points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

2. Considérons un nouvel ensemble fini de points de $[a, b]$. La réunion de cet ensemble et de l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ précédent est un ensemble fini que nous pouvons ordonner. On obtient des nombres que nous appellerons $x'_1, x'_2, \ldots, x'_j, x'_{j+1}, \ldots, x'_{p+1}$ tels que

$$a = x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_j < x'_{j+1} < \ldots < x'_{p+1} = b.$$

Calculons $\sum_{j=1}^{p} \lambda'_j(x'_{j+1} - x'_j)$, λ'_j étant la valeur constante de φ sur $]x'_j, x'_{j+1}[$. Un intervalle de la forme $]x_i, x_{i+1}[$ est la réunion d'intervalles de la forme $]x'_j, x'_{j+1}[$ $(\alpha \leqslant j \leqslant \beta)$ et sur ces intervalles on a $\lambda'_j = \lambda_i$ donc

$$\sum_{j=\alpha}^{\beta} \lambda'_j(x'_{j+1} - x'_j) = \lambda_i \sum_{j=\alpha}^{\beta}(x'_{j+1} - x'_j) = \lambda_i(x_{i+1} - x_i)$$

par suite

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda'_j(x'_{j+1} - x'_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_{i+1} - x_i).$$

On peut donc calculer l'intégrale au sens de Riemann de la fonction en escalier φ en appliquant la formule de définition de cette intégrale à tout ensemble fini de points de $[a, b]$ contenant l'ensemble initial de points qui a servi à définir φ.

b) Propriétés.

1. Soit φ et ψ deux fonctions en escalier définies sur $[a, b]$ $(a < b)$. On sait que (cf. § 5-1 b) la somme $\varphi + \psi$ est une fonction en escalier définie sur $[a, b]$. Il existe $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots x_{n+1}$ de $[a, b]$ tels que

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n+1} = b,$$

la fonction φ prenant une valeur constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Il existe $x'_1, x'_2, \ldots, x'_j, x'_{j+1}, \ldots, x'_{p+1}$ de $[a, b]$ tels que

$$a = x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_j < x'_{j+1} < \ldots < x'_{p+1} = b,$$

la fonction ψ prenant une valeur constante sur chaque intervalle $]x'_j, x'_{j+1}[$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$.
La réunion des ensembles $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ et $\{x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p+1}\}$ est un ensemble fini que nous pouvons ordonner. On obtient des nombres que nous appellerons $x''_1, x''_2, \ldots, x''_k, x''_{k+1}, \ldots, x''_{q+1}$ tels que

$$a = x''_1 < x''_2 < \ldots < x''_k < x''_{k+1} < \ldots < x''_{q+1} = b.$$

D'après la remarque 2 du sous-paragraphe précédent, on peut écrire :

$$\mathrm{I}_0(\varphi) = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k (x''_{k+1} - x''_k) \quad , \quad \lambda_k \text{ valeur constante de } \varphi \text{ sur }]x''_k, x''_{k+1}[$$

$$\mathrm{I}_0(\psi) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k (x''_{k+1} - x''_k) \quad , \quad \mu_k \text{ valeur constante de } \psi \text{ sur }]x''_k, x''_{k+1}[$$

d'où

(1) $$\mathrm{I}_0(\varphi) + \mathrm{I}_0(\psi) = \sum_{k=1}^{q} (\lambda_k + \mu_k)(x''_{k+1} - x''_k),$$

$\lambda_k + \mu_k$ est la valeur constante de $\varphi + \psi$ sur $]x''_k, x''_{k+1}[$ donc le second membre de (1) n'est autre que $\mathrm{I}_0(\varphi + \psi)$. Nous avons donc pour toutes fonctions en escalier φ et ψ définies sur $[a, b]$:

$$\boxed{\mathrm{I}_0(\varphi) + \mathrm{I}_0(\psi) = \mathrm{I}_0(\varphi + \psi)}$$

2. Soit φ une fonction en escalier définie sur $[a, b]$ $(a < b)$.
Il existe $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}$ de $[a, b]$ tels que

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n+1} = b,$$

la fonction φ prenant une valeur constante λ_i sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
Soit k un nombre réel. On sait (cf. § 5.1 b) que la fonction $k\varphi$ est une fonction en escalier définie sur $[a, b]$.

$$\mathrm{I}_0(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$$

(2) $$k\mathrm{I}_0(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} (k\lambda_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$k\lambda_i$ est la valeur constante de $k\varphi$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ donc le second membre de (2) n'est autre que $\mathrm{I}_0(k\varphi)$. Nous avons donc pour toute fonction en escalier φ définie sur $[a, b]$ et pour tout nombre réel k :

$$\boxed{k\,\mathrm{I}_0(\varphi) = \mathrm{I}_0(k\varphi)}$$

On a vu (cf. § 5.1 b) que l'ensemble $(\varepsilon_{[a,b]}, +, .)$ des fonctions en escalier définies sur $[a, b]$, muni de l'addition des fonctions numériques et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'application I_0 de $\varepsilon_{[a,b]}$ dans $\mathbb{R}$ est telle que, quelles que soient les fonctions en escalier φ et ψ définies sur $[a, b]$ et quel que soit le nombre réel k :

$$\mathrm{I}_0(\varphi + \psi) = \mathrm{I}_0(\varphi) + \mathrm{I}_0(\psi)$$
$$\mathrm{I}_0(k\varphi) = k\mathrm{I}_0(\varphi)$$

l'application I_0 est une application linéaire de l'espace vectoriel $(\varepsilon_{[a,b]}, +, .)$ dans $\mathbb{R}$ considéré comme un espace vectoriel sur lui-même, donc I_0 est une forme linéaire définie sur $\varepsilon_{[a,b]}$. On peut énoncer :

Théorème.

Si $\varepsilon_{[a,b]}$ est l'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a, b]$ $(a < b)$, l'application I_0 de $\varepsilon_{[a,b]}$ dans $\mathbb{R}$, qui associe à tout élément de $\varepsilon_{[a,b]}$ son intégrale au sens de Riemann, est une forme linéaire définie sur $\varepsilon_{[a,b]}$.

3. D'une façon générale, la relation d'ordre définie sur $\mathbb{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle définies sur une même partie D de $\mathbb{R}$.
Nous dirons que la fonction ***f* est positive** sur D et nous écrirons $f \geqslant 0$ si et seulement si $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de D. Nous écrirons $f \geqslant g$ si et seulement si $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout x de D. On dit que ***g* minore *f*** ou que ***f* majore *g*** sur D.
Si φ est une fonction en escalier définie sur $[a, b]$ $(a < b)$ telle que $\varphi \geqslant 0$ sur $[a, b]$, les valeurs constantes λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ prises par φ sur $]x_i, x_{i+1}[$ sont alors des nombres positifs ou nuls et les différences $x_{i+1} - x_i$ sont des nombres strictement positifs donc

$$\mathrm{I}_0(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) \geqslant 0$$

On a donc, si l'on suppose $a < b$:

$$(\forall \varphi \in \varepsilon_{[a,b]}) \quad \boxed{(\varphi \geqslant 0 \text{ sur } [a, b]) \Longrightarrow \mathrm{I}_0(\varphi) \geqslant 0} \qquad (1)$$

Si ψ est une fonction en escalier définie sur $[a, b]$ telle que $\psi \geqslant \varphi$, on a $\psi - \varphi \geqslant 0$ sur $[a, b]$ donc $\mathrm{I}_0(\psi - \varphi) \geqslant 0$, puisque I_0 est une forme linéaire définie sur $\varepsilon_{[a,b]}$ on peut écrire cette dernière inégalité :

$$\mathrm{I}_0(\psi) - \mathrm{I}_0(\varphi) \geqslant 0$$

donc

$$\mathrm{I}_0(\psi) \geqslant \mathrm{I}_0(\varphi)$$

et on peut écrire, si l'on suppose toujours $a < b$:

$$(\forall \varphi \in \varepsilon_{[a,b]}) \quad (\forall \psi \in \varepsilon_{[a,b]}) \quad \boxed{(\psi \geqslant \varphi \text{ sur } [a, b]) \Longrightarrow \mathrm{I}_0(\psi) \geqslant \mathrm{I}_0(\varphi)} \qquad (2)$$

Soit φ une fonction en escalier telle que $m \leqslant \varphi(x) \leqslant \mathrm{M}$ sur $[a, b]$, m et M étant deux nombres réels donnés, les intégrales au sens de Riemann des fonctions constantes $x \longmapsto m$ et $x \longmapsto \mathrm{M}$ sur $[a, b]$ sont respectivement $m(b - a)$ et $\mathrm{M}(b - a)$ et d'après (2) on a

$$m(b - a) \leqslant \mathrm{I}_0(\varphi) \leqslant \mathrm{M}(b - a)$$

En résumé, si l'on suppose $a < b$:

$$(\forall \varphi \in \varepsilon_{[a,b]}) \quad \boxed{(m \leqslant \varphi(x) \leqslant M \text{ sur } [a,b]) \Longrightarrow m(b-a) \leqslant I_0(\varphi) \leqslant M(b-a)} \quad (3)$$

Si φ est une fonction en escalier telle que $|\varphi(x)| \leqslant M$ sur $[a, b]$ ($M > 0$ donné), on peut écrire pour tout x de $[a, b]$:

$$-M \leqslant \varphi(x) \leqslant M$$

et en appliquant (3) on a

$$-M(b-a) \leqslant I_0(\varphi) \leqslant M(b-a)$$

c'est-à-dire

$$|I_0(\varphi)| \leqslant M(b-a).$$

En résumé, si l'on suppose $a < b$:

$$(\forall \varphi \in \varepsilon_{[a,b]}) \quad \boxed{(|\varphi(x)| \leqslant M \text{ sur } [a,b]) \Longrightarrow |I_0(\varphi)| \leqslant M(b-a)} \quad (4)$$

5. 3 FONCTIONS INTÉGRABLES AU SENS DE RIEMANN

a) Définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann sur un segment.

Soit une fonction numérique f définie sur $[a, b]$ $(a < b)$. On dit que f **est bornée sur** $[a, b]$ si et seulement si l'ensemble des valeurs prises par f sur $[a, b]$ est borné. Cela signifie que cet ensemble de valeurs est majoré et minoré donc il admet une borne supérieure M et une borne inférieure m. Les nombres M et m s'appellent la borne supérieure et la borne inférieure de f. Il existe alors au moins deux fonctions en escalier (fig. 4) qui sont les fonctions constantes définies sur $[a, b]$

$$\varphi : \; x \longmapsto m$$
$$\psi : \; x \longmapsto M,$$

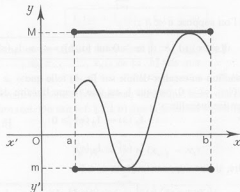


Fig. 4

on a pour tout x de $[a, b]$ $\qquad m \leqslant f(x) \leqslant M$

c'est-à-dire que sur $[a, b]$ on a $\qquad \varphi \leqslant f \leqslant \psi$

donc si f est bornée sur $[a, b]$ il existe au moins deux fonctions en escalier qui encadrent f sur $[a, b]$.

Réciproquement soit une fonction numérique f définie sur $[a, b]$ que l'on peut encadrer par des fonctions en escalier φ et ψ définies sur $[a, b]$ c'est-à-dire que f peut être majorée et minorée par ces fonctions en escalier :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi,$$

on a pour tout x de $[a, b]$:

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x),$$

or ψ étant une fonction en escalier, elle admet une plus grande valeur M et l'on a

$$(\forall x \in [a, b]) \qquad f(x) \leqslant \psi(x) \leqslant M;$$

de même φ admet une plus petite valeur m et l'on a

$$(\forall x \in [a, b] \qquad m \leqslant \varphi(x) \leqslant f(x).$$

Donc f est bornée sur $[a, b]$. On peut énoncer :

Théorème 1.

Pour qu'une fonction numérique f définie sur $[a, b]$ $(a < b)$ puisse être encadrée par des fonctions en escalier définies sur $[a, b]$ il faut et il suffit qu'elle soit bornée sur $[a, b]$.

Plaçons-nous dans cette hypothèse. Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$, encadrée par des fonctions en escalier φ et ψ sur $[a, b]$:

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi,$$

on sait (cf. § 5.2 b) que si $\varphi \leqslant \psi$, on a $I_0(\varphi) \leqslant I_0(\psi)$. Soit E l'ensemble des nombres réels $I_0(\varphi)$ obtenus à l'aide des fonctions en escalier φ qui minorent f sur $[a, b]$ et F l'ensemble des nombres réels $I_0(\psi)$ obtenus à l'aide des fonctions en escalier ψ qui majorent f sur $[a, b]$. Tout nombre de F est un majorant de E; donc, E étant une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée, E admet une borne supérieure que nous désignerons par : $\sup I_0(\varphi)$. Tout nombre de E est un minorant de F; donc, F étant une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée, F admet une borne inférieure que nous désignerons par : $\inf I_0(\psi)$.
Nous nous placerons dans le cas où $\sup I_0(\varphi) = \inf I_0(\psi)$. On dit alors que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Définition.

On dit qu'une fonction numérique f définie sur $[a, b]$ $(a < b)$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement si :

1. On peut l'encadrer sur $[a, b]$ par des fonctions en escalier (ce qui revient à dire qu'elle est bornée sur $[a, b]$).
2. La borne supérieure de l'ensemble des intégrales au sens de Riemann des fonctions en escalier minorant f sur $[a, b]$ est égale à la borne inférieure de l'ensemble des intégrales au sens de Riemann des fonctions en escalier majorant f sur $[a, b]$.

Cette borne commune s'appelle l'**intégrale au sens de Riemann** de la fonction f sur $[a\,,\,b]$. On la note encore $\int_a^b f(x)\,dx$.

On a donc, si φ et ψ sont des fonctions en escalier telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ sur $[a\,,\,b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sup \mathrm{I}_0(\varphi) = \inf \mathrm{I}_0(\psi)}$$

Dans tout ce qui suit, il ne s'agira que de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a\,,\,b]$, *avec provisoirement* $a < b$, *et nous dirons souvent « fonction intégrable » sur* $[a\,,\,b]$, *étant entendu que cette fonction répond aux conditions de la définition précédente.*

Nous allons transformer la condition 2 de la définition par une autre qui sera plus commode.

Soit f une fonction bornée sur $[a\,,\,b]$, E l'ensemble des nombres $\mathrm{I}_0(\varphi)$ et F l'ensemble des nombres $\mathrm{I}_0(\psi)$, φ et ψ étant des fonctions en escalier telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ sur $[a\,,\,b]$.

On sait (cf. tome 1, § 3-13 a) que E et F forment un couple de parties de $\mathbb{R}$ **adjacentes** si et seulement si l'on a l'une des deux propriétés équivalentes I ou II suivantes :

I. la borne supérieure de E est égale à la borne inférieure de F.

$$\text{II.}\ \begin{cases} (\forall x \in \mathrm{E}) \quad (\forall y \in \mathrm{F}) \quad x \leqslant y \\ (\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \quad (\exists x \in \mathrm{E}) \quad (\exists y \in \mathrm{F}) \quad |y - x| < \alpha. \end{cases}$$

Tout nombre $\mathrm{I}_0(\varphi)$ est inférieur à tout nombre $\mathrm{I}_0(\psi)$. Pour que $\sup \mathrm{I}_0(\varphi) = \inf \mathrm{I}_0(\psi)$ il faut et il suffit que, quel que soit $\alpha > 0$, l'on puisse trouver des fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ sur $[a\,,\,b]$ et $|\mathrm{I}_0(\psi) - \mathrm{I}_0(\varphi)| < \alpha$ que l'on peut écrire simplement $\mathrm{I}_0(\psi) - \mathrm{I}_0(\varphi) < \alpha$ puisque $\mathrm{I}_0(\varphi) \leqslant \mathrm{I}_0(\psi)$. Concluons :

Théorème 2.

Une fonction numérique f définie sur $[a\,,\,b]$ $(a < b)$ est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,,\,b]$ si et seulement si, **quel que soit** $\alpha > 0$, il existe des fonctions en escalier φ et ψ définies sur $[a\,,\,b]$ telles que

$$\begin{cases} \varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{sur} \quad [a\,,\,b] \\ \mathrm{I}_0(\psi) - \mathrm{I}_0(\varphi) < \alpha. \end{cases}$$

b) Exemples.

1. Toute fonction f en escalier définie sur $[a\,,\,b]$ est intégrable au sens de Riemann car elle répond à la définition précédente d'une fonction intégrable puisqu'elle est bornée sur $[a\,,\,b]$ et son intégrale $\mathrm{I}_0(f)$ (définie au § 5.2 a) est la borne commune des ensembles des intégrales des fonctions en escalier qui l'encadrent sur $[a\,,\,b]$.

Désignons par $\mathfrak{J}_{[a,b]}$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a\,,\,b]$. L'ensemble $\mathcal{E}_{[a,b]}$ des fonctions en escalier définies sur $[a\,,\,b]$ est donc une partie de $\mathfrak{J}_{[a,b]}$.

Considérons les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_0 :\ & \mathcal{E}_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f \longmapsto \mathrm{I}_0(f) = \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{I} :\ & \mathfrak{J}_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f \longmapsto \mathrm{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

l'application I_0 est donc la restriction de I à $\mathcal{E}_{[a,b]}$

2. Soit une fonction f monotone sur $[a\,,\,b]$ $(a < b)$. Nous supposerons qu'elle est croissante sur $[a\,,\,b]$. Cherchons des fonctions en escalier qui encadrent f sur $[a\,,\,b]$ (fig. 5).

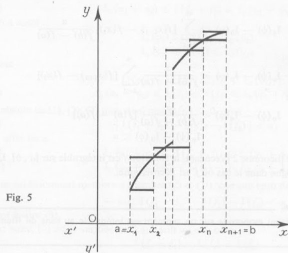


Fig. 5

Soit un nombre fini de points de $[a\,,\,b]$ tels que l'on ait

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n+1} = b,$$

la fonction φ telle que :
sur chaque intervalle $[x_i\,,\,x_{i+1}[$ $\quad (1 \leqslant i \leqslant n-1) \quad \varphi(x) = f(x_i)$
sur $[x_n\,,\,b]$, $\quad \varphi(x) = f(x_n)$
est une fonction en escalier qui minore f sur $[a\,,\,b]$.

La fonction ψ telle que :
sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $\psi(x) = f(x_{i+1})$
sur $[x_n, b]$, $\psi(x) = f(b)$
est une fonction en escalier qui majore f sur $[a, b]$.

$$\mathrm{I}_0(\psi) - \mathrm{I}_0(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i+1}) - f(x_i)](x_{i+1} - x_i)$$

Quel que soit $\alpha > 0$, cherchons à avoir

$$\mathrm{I}_0(\psi) - \mathrm{I}_0(\varphi) < \alpha,$$

si l'on choisit les points de $[a, b]$ de manière que pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$ on ait

$$x_{i+1} - x_i < \frac{\alpha}{f(b) - f(a)}$$

(on suppose que f n'est pas une constante sur $[a, b]$ donc $f(b) - f(a) \neq 0$),
on a

$$\mathrm{I}_0(\psi) - \mathrm{I}_0(\varphi) < \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \frac{\alpha}{f(b) - f(a)}$$

$$\mathrm{I}_0(\psi) - \mathrm{I}_0(\varphi) < \frac{\alpha}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

$$\mathrm{I}_0(\psi) - \mathrm{I}_0(\varphi) < \frac{\alpha}{f(b) - f(a)} [f(b) - f(a)]$$

et on a bien $\mathrm{I}_0(\psi) - \mathrm{I}_0(\varphi) < \alpha$

Donc, d'après le théorème 2 précédent, la fonction f est intégrable sur $[a, b]$. La démonstration est analogue dans le cas où f est décroissante.

Théorème.

Toute fonction monotone sur un segment est intégrable au sens de Riemann sur ce segment.

3. Nous admettrons le théorème important suivant :

Théorème.

Toute fonction continue sur un segment est intégrable au sens de Riemann sur ce segment.

c) Opérations sur les fonctions intégrables.

Nous allons étendre aux fonctions intégrables sur $[a, b]$ $(a < b)$ les opérations (addition, multiplication par un nombre réel) sur les fonctions en escalier (cf. § 5.2 b). Nous proposons, en exercice, l'étude de la multiplication des fonctions intégrables.

1. Soit f_1 et f_2 deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. D'après le théorème 2 (cf. § 5.3 a), quels que soient $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$, il existe des fonctions en escalier φ_1 et ψ_1, φ_2 et ψ_2 telles que sur $[a, b]$ on ait

$$\varphi_1 \leqslant f_1 \leqslant \psi_1 \quad , \quad \text{avec} \quad \mathrm{I}_0(\psi_1) - \mathrm{I}_0(\varphi_1) < \alpha_1$$
$$\varphi_2 \leqslant f_2 \leqslant \psi_2 \quad , \quad \text{avec} \quad \mathrm{I}_0(\psi_2) - \mathrm{I}_0(\varphi_2) < \alpha_2$$

par suite

$$\varphi_1 + \varphi_2 \leqslant f_1 + f_2 \leqslant \psi_1 + \psi_2,$$

avec

$$\mathrm{I}_0(\psi_1 + \psi_2) - \mathrm{I}_0(\varphi_1 + \varphi_2) = [\mathrm{I}_0(\psi_1) - \mathrm{I}_0(\varphi_1)] + [\mathrm{I}_0(\psi_2) - \mathrm{I}_0(\varphi_2)] < \alpha_1 + \alpha_2$$

donc quel que soit $\alpha > 0$ on aura

(1) $$\mathrm{I}_0(\psi_1 + \psi_2) - \mathrm{I}_0(\varphi_1 + \varphi_2) < \alpha$$

si l'on choisit $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{\alpha}{2}$

donc $f_1 + f_2$ est intégrable sur $[a, b]$. Son intégrale $\mathrm{I}(f_1 + f_2)$ est la borne supérieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier minorant $f_1 + f_2$ sur $[a, b]$ et la borne inférieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier majorant $f_1 + f_2$ sur $[a, b]$ donc, puisque $\varphi_1 + \varphi_2$ minore $f_1 + f_2$ et $\psi_1 + \psi_2$ majore $f_1 + f_2$:

(2) $$\mathrm{I}_0(\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \mathrm{I}(f_1 + f_2) \leqslant \mathrm{I}_0(\psi_1 + \psi_2).$$

On a aussi

$$\mathrm{I}_0(\varphi_1) \leqslant \mathrm{I}(f_1) \leqslant \mathrm{I}_0(\psi_1)$$
$$\mathrm{I}_0(\varphi_2) \leqslant \mathrm{I}(f_2) \leqslant \mathrm{I}_0(\psi_2)$$

donc

$$\mathrm{I}_0(\varphi_1) + \mathrm{I}_0(\varphi_2) \leqslant \mathrm{I}(f_1) + \mathrm{I}(f_2) \leqslant \mathrm{I}_0(\psi_1) + \mathrm{I}_0(\psi_2)$$

(3) $$\mathrm{I}_0(\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \mathrm{I}(f_1) + \mathrm{I}(f_2) \leqslant \mathrm{I}_0(\psi_1 + \psi_2)$$

Il résulte de (1), (2), (3) que, quel que soit $\alpha > 0$, on a :

(4) $$|\mathrm{I}(f_1 + f_2) - \mathrm{I}(f_1) - \mathrm{I}(f_2)| < \alpha;$$

en effet on a

(2) $$\mathrm{I}_0(\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \mathrm{I}(f_1 + f_2) \leqslant \mathrm{I}_0(\psi_1 + \psi_2)$$

(3') $$-\mathrm{I}_0(\psi_1 + \psi_2) \leqslant -\mathrm{I}(f_1) - \mathrm{I}(f_2) \leqslant -\mathrm{I}_0(\varphi_1 + \varphi_2)$$

et en additionnant membre à membre (2) et (3'), compte tenu de (1) :

$$-\alpha < \mathrm{I}(f_1 + f_2) - \mathrm{I}(f_1) - \mathrm{I}(f_2) < \alpha$$

c'est-à-dire (4).

Par suite, (4) étant vérifiée quel que soit $\alpha > 0$, on a

$$\mathrm{I}(f_1 + f_2) = \mathrm{I}(f_1) + \mathrm{I}(f_2)$$

Conclusion : **si f_1 et f_2 sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ $(a < b)$, la somme $f_1 + f_2$ est intégrable sur $[a, b]$ et l'on a**

$$\boxed{\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx}$$

2. Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Quel que soit $\alpha_1 > 0$, il existe des fonctions en escalier φ et ψ telles que sur $[a, b]$ on ait

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad , \quad \text{avec} \quad \mathrm{I}_0(\psi) - \mathrm{I}_0(\varphi) < \alpha_1$$

si $k > 0$, on peut écrire :

$$k\varphi \leqslant kf \leqslant k\psi,$$

avec $$\mathrm{I}_0(k\psi) - \mathrm{I}_0(k\varphi) = k[\mathrm{I}_0(\psi) - \mathrm{I}_0(\varphi)] < k\alpha_1$$

et, quel que soit $\alpha > 0$, on aura

(5) $$\mathrm{I}_0(k\psi) - \mathrm{I}_0(k\varphi) < \alpha,$$

si on choisit $\alpha_1 = \frac{\alpha}{k}$. Donc kf est intégrable sur $[a, b]$. Son intégrale $\mathrm{I}(kf)$ est la borne supérieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier minorant kf sur $[a, b]$ et la borne inférieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier majorant kf sur $[a, b]$ donc, puisque $k\varphi$ minore kf et $k\psi$ majore kf :

(6) $$\mathrm{I}_0(k\varphi) \leqslant \mathrm{I}(kf) \leqslant \mathrm{I}_0(k\psi).$$

On a aussi

$$\mathrm{I}_0(\varphi) \leqslant \mathrm{I}(f) \leqslant \mathrm{I}_0(\psi)$$

$$k\,\mathrm{I}_0(\varphi) \leqslant k\,\mathrm{I}(f) \leqslant k\,\mathrm{I}_0(\psi)$$

(7) $$\mathrm{I}_0(k\varphi) \leqslant k\,\mathrm{I}(f) \leqslant \mathrm{I}_0(k\psi)$$

Il résulte de (5), (6), (7) que, quel que soit $\alpha > 0$, on a

$$|\mathrm{I}(kf) - k\,\mathrm{I}(f)| < \alpha$$

(raisonner comme pour l'addition)

par suite

$$\mathrm{I}(kf) = k\,\mathrm{I}(f).$$

Si $k < 0$, la démonstration est analogue en remarquant que l'on a ici

$$k\psi \leqslant kf \leqslant k\varphi.$$

Si $k = 0$, kf est la fonction nulle sur $[a, b]$. On a

$$\mathrm{I}(kf) = \mathrm{I}_0(kf) = 0$$

et $$k\,\mathrm{I}(f) = 0 \times \mathrm{I}(f) = 0$$

donc $$\mathrm{I}(kf) = k\,\mathrm{I}(f)$$

Conclusion : **si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$ $(a < b)$, k étant un nombre réel quelconque, la fonction kf est intégrable sur $[a, b]$ et l'on a**

$$\boxed{\int_a^b [k\,f(x)]\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx}$$

Soit $(\mathfrak{J}_{[a,b]}, +, .)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a, b]$ muni de l'addition des fonctions numériques et de la multiplication par un nombre réel. L'ensemble $\mathfrak{J}_{[a,b]}$ est une partie non vide de l'ensemble $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions numériques définies sur $[a, b]$. On vient de voir que $\mathfrak{J}_{[a,b]}$ est une partie stable pour l'addition et pour la multiplication par un nombre réel, donc $(\mathfrak{J}_{[a,b]}, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}), +, .)$.

Par ailleurs l'application I de $\mathfrak{J}_{[a,b]}$ dans $\mathbb{R}$: $f \longmapsto \mathrm{I}(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ est telle que quelles que soient les fonctions intégrables f_1 et f_2 sur $[a, b]$ et quel que soit le nombre réel k :

$$\mathrm{I}(f_1 + f_2) = \mathrm{I}(f_1) + \mathrm{I}(f_2)$$
$$\mathrm{I}(kf) = k\,\mathrm{I}(f)$$

donc I est une application linéaire de $(\mathfrak{J}_{[a,b]}, +, .)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une forme linéaire définie sur $\mathfrak{J}_{[a,b]}$. On peut énoncer :

Théorème.

L'ensemble $(\mathfrak{J}_{[a,b]}, +, .)$ des fonctions intégrables sur $[a, b]$ muni de l'addition des fonctions numériques et de la multiplication par un nombre réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
L'application I de $\mathfrak{J}_{[a,b]}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à tout élément de $\mathfrak{J}_{[a,b]}$ son intégrale sur $[a, b]$ est une forme linéaire définie sur $\mathfrak{J}_{[a,b]}$.

REMARQUE

On peut dire que $(\mathcal{E}_{[a,b]}, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{J}_{[a,b]}, +, .)$ (cf. § 5-1 b).

EXERCICES

1. Soit f_1 et f_2 deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. On désigne par $\sup(f_1, f_2)$ et par $\inf(f_1, f_2)$ les fonctions qui associent à tout x de $[a, b]$ respectivement le plus grand et le plus petit des deux nombres $f_1(x)$, $f_2(x)$. Démontrer que la fonction $\sup(f_1, f_2)$ est intégrable sur $[a, b]$. [Pour cela on remarquera que si $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ sont des fonctions en escalier telles que, sur $[a, b]$, $\varphi_1 \leqslant f_1 \leqslant \psi_1$ et $\psi_2 \leqslant f_2 \leqslant \psi_2$, on a aussi $\sup(\varphi_1, \varphi_2) \leqslant \sup(f_1, f_2) \leqslant \sup(\psi_1, \psi_2)$ et on appliquera le théorème 2 du § 5-3 a.]
En déduire que $\inf(f_1, f_2)$ et $|f|$, f étant intégrable sur $[a, b]$, sont aussi intégrables sur $[a, b]$. [Pour cela on remarquera que $\inf(f_1, f_2) = -\sup(-f_1, -f_2)$ et que $|f| = \sup(f, 0) + \sup(-f, 0)$.]

2. *a*) Montrer que si f_1 et f_2 sont intégrables et positives sur $[a, b]$, le produit f_1f_2 l'est aussi. [On appliquera le théorème 2 du § 5-3 a en remarquant, les notations étant celles de l'exercice précédent, que $\psi_2\psi_1 - \varphi_2\varphi_1 = \psi_2(\psi_1 - \varphi_1) + \varphi_1(\psi_2 - \varphi_2)$.]
b) Plus généralement, montrer que si f_1 et f_2 sont intégrables sur $[a, b]$, le produit f_1f_2 l'est aussi [si m_1 et m_2 sont les bornes inférieures de f_1 et f_2 sur $[a, b]$, on écrira

$$f_1f_2 = (f_1 - m_1)(f_2 - m_2) + m_1f_2 + m_2f_1 - m_1m_2].$$

En déduire que $(\mathfrak{J}_{[a,b]}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}), +, \times)$ (cf. § 5-1 b).

5. 4 PROPRIÉTÉS

Nous allons étendre aux fonctions intégrables sur $[a, b]$ les inégalités vérifiées par les intégrales des fonctions en escalier (cf. § 5-2 b). Nous supposerons $a < b$.

a) Soit f une fonction intégrable et positive sur $[a, b]$. Cette fonction est minorée par une fonction en escalier qui est la fonction nulle sur $[a, b]$. L'intégrale de la fonction nulle sur $[a, b]$ est 0 donc, puisque $\mathrm{I}(f)$ est la bonne supérieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier qui minorent f sur $[a, b]$, on a

$$0 \leqslant \mathrm{I}(f)$$

et on peut écrire, pour toute fonction f intégrable sur $[a, b]$ $(a < b)$:

(1) $$\boxed{(f \geqslant 0 \text{ sur } [a, b]) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0}$$

b) Si g est une autre fonction intégrable sur $[a, b]$ telle que $g \geqslant f$ sur $[a, b]$, on a $g - f \geqslant 0$ donc $\mathrm{I}(g - f) \geqslant 0$ et, puisque I est une forme linéaire définie sur $\mathfrak{J}_{[a,b]}$, on peut écrire cette dernière inégalité :

$$\mathrm{I}(g) - \mathrm{I}(f) \geqslant 0$$

ou encore

$$\mathrm{I}(g) \geqslant \mathrm{I}(f)$$

et on peut écrire, pour toutes fonctions f et g intégrables sur $[a, b]$ $(a < b)$:

(2) $$(g \geqslant f \text{ sur } [a, b]) \Longrightarrow \int_a^b g(x)\, dx \geqslant \int_a^b f(x)\, dx$$

c) Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et supposons que l'on ait pour tout x de $[a, b]$: $m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$, m et M étant deux nombres réels donnés. D'après (2) on peut écrire :

$$\int_a^b m\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b \mathrm{M}\, dx$$

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \mathrm{M}(b - a).$$

En résumé on peut écrire, pour toute fonction f intégrable sur $[a, b]$ $(a < b)$:

(3) $$(m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M} \text{ sur } [a, b]) \Longrightarrow m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \mathrm{M}(b - a)$$

Si, en particulier, m et M sont les bornes inférieure et supérieure de f sur $[a, b]$, on peut écrire

(3′) $$m \leqslant \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \mathrm{M}$$

La moyenne arithmétique de n nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ est le nombre $\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{n}$. On peut remarquer que ce nombre n'est autre que :

$$\frac{1}{b - a}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{b - a}\int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

la fonction φ étant une fonction en escalier définie sur $[a, b]$ $(a < b)$ avec :

$$a = x_1 < x_2 < \ldots x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n+1} = b,$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b - a}{n} \text{ pour tout } i \text{ de } \{1, 2, \ldots, n\},$$

λ_i valeur constante de φ sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Nous dirons que le nombre $\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{n}$ est la valeur moyenne, ou plus simplement la moyenne, de la fonction φ sur $[a, b]$. Plus généralement :

Définition.

On appelle valeur moyenne ou, plus simplement, moyenne d'une fonction f intégrable sur $[a, b]$ $(a < b)$, le nombre $\dfrac{1}{b - a}\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

Le calcul d'une moyenne en Physique, en Statistique, dans les Probabilités, se fait fréquemment. Par exemple, si la fonction $f : t \longmapsto x = f(t)$ est une fonction périodique, de période T, intégrable sur $[0, \mathrm{T}]$, la valeur moyenne de f pendant une période est $\dfrac{1}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, dt$.

Le résultat (3′) peut s'énoncer :

la moyenne d'une fonction intégrable sur un segment est un nombre compris entre la borne inférieure et la borne supérieure de la fonction sur ce segment.

Si f est **continue** sur $[a, b]$, on sait qu'elle est intégrable sur $[a, b]$ (cf. § 5-3 b). On sait aussi (cf. § 1-6 b) que l'image du segment $[a, b]$ est un segment $[m, \mathrm{M}]$, m et M étant les bornes inférieure et supérieure de f sur $[a, b]$. La moyenne de f sur $[a, b]$ est un nombre du segment $[m, \mathrm{M}]$ d'après (3′), donc il existe un nombre c au moins de $[a, b]$ tel que $f(c)$ soit égal à cette moyenne. On peut écrire, pour toute fonction f continue et de bornes m et M sur $[a, b]$:

$$(\exists c \in [a, b]) \quad \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

la valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment est prise par cette fonction en un point au moins du segment.

d) Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$ telle que pour tout x de $[a, b]$: $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}$ $(\mathrm{M} > 0$ donné), on peut écrire pour tout x de $[a, b]$:

$$-\mathrm{M} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$$

et d'après (3) :

$$-\mathrm{M}(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \mathrm{M}(b - a)$$

c'est-à-dire :

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \mathrm{M}(b - a).$$

En résumé on peut écrire, pour toute fonction f intégrable sur $[a, b]$ $(a < b)$:

(4) $$|f(x)| \leqslant \mathrm{M} \text{ sur } [a, b] \Longrightarrow \left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \mathrm{M}(b - a)$$

EXERCICES

1. Si f est intégrable sur $[a, b]$ $(a < b)$, on sait (cf. § 5-3 c, ex. 1) que $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$. Démontrer que

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

2. Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ $(a < b)$ et telle que pour tout x de $[a, b]$ on ait $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}$ $(\mathrm{M} > 0)$ donné). Soit g une fonction intégrable positive sur $[a, b]$. On sait (cf. § 5-3 c, ex. 2) que fg est intégrable sur $[a, b]$. Démontrer que :

$$\left|\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right| \leqslant \mathrm{M}\int_a^b g(x)\, dx.$$

REMARQUE

Dans le cas où f est intégrable et positive sur $[a, b]$ $(a < b)$, soit φ une fonction en escalier et φ_+ une fonction en escalier positive qui minorent f sur $[a, b]$. Le nombre $I(f)$ est la borne supérieure de l'ensemble E des nombres $I_0(\varphi)$, montrons que c'est aussi la borne supérieure de l'ensemble E′ des nombres $I_0(\varphi_+)$. Il suffit de montrer que E et E′ ont les mêmes majorants, car ils auront alors la même borne supérieure qui est le plus petit de ces majorants. Tout majorant de E est majorant de E′ puisque $E' \subset E$. Réciproquement soit M un majorant de E′. Quel que soit $I_0(\varphi)$ de E, soit φ_1 la fonction en escalier définie sur $[a, b]$ par :

$\varphi_1(x) = \varphi(x)$ sur tout intervalle où φ est positive;
$\varphi_1(x) = 0$ sur tout intervalle où φ n'est pas positive.

On a $I_0(\varphi_1) \in E'$ donc $I_0(\varphi_1) \leqslant M$.
On a $\varphi \leqslant \varphi_1$ sur $[a, b]$ donc $I_0(\varphi) \leqslant I_0(\varphi_1)$
par suite $I_0(\varphi) \leqslant M$ et tout majorant de E′ est majorant de E. Les ensembles E et E′ ont les mêmes majorants et par suite la même borne supérieure. Donc $I(f)$ est la borne supérieure de E′.
Par ailleurs $I(f)$ est la borne inférieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier ψ qui majorent f sur $[a, b]$. Puisque f est positive sur $[a, b]$, les fonctions ψ le sont aussi. Donc *si f est intégrable et positive sur $[a, b]$, $I(f)$ est la borne commune des deux ensembles des intégrales des fonctions en escalier* **positives** *qui encadrent f sur $[a, b]$.*

5. 5 FONCTION INTÉGRABLE AU SENS DE RIEMANN SUR $[a, b]$ AVEC $a \geqslant b$. RELATION DE CHASLES. APPLICATION AUX FONCTIONS MONOTONES PAR MORCEAUX

a) Fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ avec $a \geqslant b$.

Nous avons considéré, jusqu'à présent, un segment $[a, b]$ avec $a < b$. Débarrassons-nous de l'hypothèse $a < b$.
Si f est une fonction intégrable (toujours au sens de Riemann) sur $[a, b]$ avec $a < b$, nous dirons encore que f est intégrable sur $[b, a]$ et nous conviendrons que son intégrale sur $[b, a]$ est :

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Nous conviendrons aussi que, pour toute fonction f définie au point a :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

b) Relation de Chasles.

Soit φ une fonction en escalier définie sur $[a, b]$ $(a < b)$. Si c est un nombre quelconque de $[a, b]$, il existe un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{n+1}$ de $[a, b]$ tels que :

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m < c = x_{m+1} < \ldots < x_{n+1} = b,$$

la fonction φ prenant une valeur constante λ_i sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
L'intégrale de φ sur $[a, b]$ est

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$$

donc

(1) $$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^c \varphi(x)\,dx + \int_c^b \varphi(x)\,dx.$$

Notons que si φ_1 et φ_2 sont les restrictions de φ respectivement à $[a, c]$ et $[c, b]$, ce sont des fonctions en escalier définies respectivement sur $[a, c]$ et $[c, b]$ et (1) peut s'écrire :

(2) $$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^c \varphi_1(x)\,dx + \int_c^b \varphi_2(x)\,dx$$

Réciproquement si l'on a deux fonctions en escalier φ_1 et φ_2 définies respectivement sur $[a, c]$ et $[c, b]$ $(a < c < b)$, la fonction φ définie sur $[a, b]$ par :

si $a \leqslant x \leqslant c$, $\varphi(x) = \varphi_1(x)$
si $c < x \leqslant b$, $\varphi(x) = \varphi_2(x)$

est une fonction en escalier et nous avons encore (1) et (2).

Nous nous proposons de généraliser la formule (1) au cas d'une fonction f intégrable (au sens de Riemann) quelconque sur $[a, b]$. Nous supposerons provisoirement que l'on a : $a < c < b$ et nous désignerons par $I(f)$, $I_1(f)$, $I_2(f)$ les intégrales, quand elles existent, de f respectivement sur $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$.
Si f est intégrable sur $[a, b]$, pour tout $\alpha > 0$ il existe des fonctions en escalier φ et ψ telles que sur $[a, b]$ on ait

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi, \quad \text{avec } I(\psi) - I(\varphi) < \alpha.$$

Soit φ_1 et φ_2 les restrictions de φ à $[a, c]$ et $[c, b]$
ψ_1 et ψ_2 les restrictions de ψ à $[a, c]$ et $[c, b]$
sur $[a, c]$ on a $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1$
sur $[c, b]$ on a $\varphi_2 \leqslant f \leqslant \psi_2$
d'après (2) $I(\varphi) = I_1(\varphi_1) + I_2(\varphi_2)$
de même $I(\psi) = I_1(\psi_1) + I_2(\psi_2)$
d'où $I(\psi) - I(\varphi) = [I_1(\psi_1) - I_1(\varphi_1)] + [I_2(\psi_2) - I_2(\varphi_2)] < \alpha$

les nombres entre crochets étant positifs ou nuls, chacun d'eux est donc inférieur à α donc f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[a, b]$ (cf. § 5. 3 a, théorème 2).
Réciproquement si f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$, pour tout $\alpha_1 > 0$ il existe des fonctions en escalier φ_1 et ψ_1 telles que sur $[a, c]$ on ait

$$\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1 \quad , \quad \text{avec} \quad I_1(\psi_1) - I_1(\varphi_1) < \alpha_1$$

et il existe des fonctions en escalier φ_2 et ψ_2 telles que sur $[c, b]$ on ait

$$\varphi_2 \leqslant f \leqslant \psi_2 \quad , \quad \text{avec} \quad I_2(\psi_2) - I_2(\varphi_2) < \alpha_2.$$

Soit φ et ψ les fonctions en escalier définies sur $[a, b]$ par :

si $a \leqslant x \leqslant c$, $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ et $\psi(x) = \psi_1(x)$
si $c < x \leqslant b$, $\varphi(x) = \varphi_2(x)$ et $\psi(x) = \psi_2(x)$

on a sur $[a, b]$:

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad I(\psi) - I(\varphi) = [I_1(\psi_1) - I_1(\varphi_1)] + [I_2(\psi_2) - I_2(\varphi_2)].$$

Pour tout $\alpha > 0$, pour avoir $I(\psi) - I(\varphi) < \alpha$, il suffit, par exemple, de prendre

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

Donc f est intégrable sur $[a, b]$.

Nous voyons donc que f est intégrable sur $[a, b]$ $(a < c < b)$ si et seulement si f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Nous pouvons alors écrire :

$$I_1(\varphi_1) \leqslant I_1(f) \leqslant I_1(\psi_1)$$
$$I_2(\varphi_2) \leqslant I_2(f) \leqslant I_2(\psi_2)$$

d'où en additionnant membre à membre, compte tenu de (2) :

$$I(\varphi) \leqslant I_1(f) + I_2(f) \leqslant I(\psi)$$

nous avons aussi

$$I(\varphi) \leqslant I(f) \leqslant I(\psi)$$

par suite, pour tout $\alpha > 0$,

$$|I(f) - I_1(f) - I_2(f)| \leqslant I(\psi) - I(\varphi) < \alpha$$

donc $I(f) = I_1(f) + I_2(f)$ (nous avons fait un raisonnement analogue au § 5.3 c).

Concluons :

Théorème.

Une fonction f est intégrable sur $[a, b]$ $(a < c < b)$ si et seulement si elle est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Nous avons alors

(1') $$\int_a^b f(x)\, d(x) = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

C'est la **relation de Chasles** pour les intégrales.

Nous avons supposé $a < c < b$. Supposons que l'on ait, par exemple, $a < b < c$ et f intégrable sur $[a, c]$ par suite sur $[a, b]$ et $[b, c]$:

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

d'où $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx - \int_b^c f(x)\, dx$$

mais $$\int_b^c f(x)\, dx = -\int_c^b f(x)\, dx \quad \text{(convention du sous-paragraphe } a)$$

donc $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

On étudiera de même les autres cas et on verra que (1') est vérifiée quel que soit l'ordre des nombres a, b, c pourvu que f soit intégrable sur l'un des segments $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ qui contient les deux autres.

c) Application à une fonction monotone par morceaux sur un segment.

Définition.

On appelle fonction monotone par morceaux sur $[a, b]$ $(a < b)$ toute fonction numérique définie sur $[a, b]$ possédant les propriétés suivantes : il existe un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}$ de $[a, b]$ tels que

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n < x_{n+1} = b,$$

la fonction f étant monotone sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

On rapprochera cette définition de celle d'une fonction en escalier (si on remplace dans la définition précédente le mot « monotone » par « constante », on obtient la définition d'une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Montrons qu'une fonction f monotone par morceaux sur $[a, b]$ $(a < b)$ est intégrable sur $[a, b]$. Nous supposerons que f est définie sur $[a, b]$ et monotone sur $]a, c[$ et sur $]c, b[$ $(a < c < b)$. On généralisera.

Puisque f est définie sur $[a, c]$ et monotone sur $]a, c[$, elle est intégrable sur $[a, c]$ (la démonstration est celle du § 5.3 b; l'intervalle $]a, c[$, sur lequel est elle monotone, est ouvert au lieu d'être fermé mais cela n'a aucun inconvénient puisqu'on sait que les valeurs des fonctions en escalier aux points a et c n'interviennent pas). De même, f étant définie sur $[c, b]$ et monotone sur $]c, b[$, elle est intégrable sur $[c, b]$. On peut donc appliquer le théorème précédent : la fonction f est intégrable sur $[a, b]$ et l'on a

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

On peut énoncer.

Théorème.

Toute fonction monotone par morceaux sur un segment est intégrable au sens de Riemann sur ce segment.

II. Primitives d'une fonction

5. 6 DÉFINITION D'UNE PRIMITIVE D'UNE FONCTION. EXEMPLES

a) Définition.

Soit la fonction $F : x \longmapsto x^3 + 3x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$, sa fonction dérivée est $f : x \longmapsto 3x^2 + 3$ définie sur $\mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Plus généralement :

Définition.

Soit deux fonctions numériques f et F définies sur un intervalle I ouvert ou fermé. On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et a pour fonction dérivée sur I la fonction f.

Les problèmes qui se posent sont de deux sortes : problème d'*existence* qui consiste à savoir quelles fonctions f admettent une primitive sur un intervalle et problème de *calcul* de toutes les primitives de f quand elles existent. Nous étudierons le premier problème seulement lorsque f est continue sur un segment.

b) Existence d'une primitive pour une fonction continue sur un segment.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ donc intégrable sur $[a, b]$. Si x est un point quelconque de $[a, b]$, f est aussi continue sur le segment $[a, x]$ donc intégrable sur ce segment. Nous noterons son intégrale sur ce segment : $\int_a^x f(t)\, dt$ en remarquant bien les *rôles différents des lettres x et t*. En effet soit F la fonction définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, on voit que l'on obtient la même fonction F de la variable x si l'on

remplace t par toute autre lettre (u, v, ...). On dit que t est une variable « muette » car finalement elle n'intervient pas, tandis que x n'est pas une variable muette.

Étude de la dérivée de F *en un point* x_0 *de* $]a, b[$. Pour cela cherchons si le taux d'accroissement $\frac{F(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ de F a une limite au point x_0. On a :

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt$$

$$= \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

donc

$$(1) \qquad \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt,$$

ce taux d'accroissement n'est autre que la moyenne de f sur $[x_0, x]$. On sait, f étant continue, qu'il existe x_1 de $[x_0, x]$ tel que (cf. § 5.4 c) :

$$f(x_1) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Puisque f est continue en x_0, quel que soit $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout x de $]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$ on ait $|f(x) - f(x_0)| < \alpha$. Donc si dans l'égalité (1), le nombre x appartient à

$$]x_0 - \beta, x_0 + \beta[,$$

le nombre x_1 appartient aussi à cet intervalle et l'on a aussi $|f(x_1) - f(x_0)| < \alpha$ c'est-à-dire :

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \alpha,$$

ce qui exprime que : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$. Donc la dérivée de F au point x_0 de $]a, b[$ est $f(x_0)$.

Étude des dérivées de F *à droite et à gauche aux points* a *et* b. Si l'on suppose $a < b$ et si dans le raisonnement précédent on remplace $]x_0 - \beta, x_0 + \beta[$ par $]a, a + \beta[$ ou par $]b - \beta, b[$ on déduit :

$$\lim_{x \to a+0} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a)$$

$$\lim_{x \to b-0} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b)$$

donc F est dérivable et a pour fonction dérivée f sur le segment $[a, b]$, ou encore :

Théorème.

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ définie sur $[a, b]$ est une primitive de f sur $[a, b]$.

c) Recherche de toutes les primitives d'une fonction à partir de l'une d'elles.

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I ouvert ou fermé. La dérivée de F en tout point x de I (ou seulement la dérivée à droite ou à gauche aux extrémités du segment) est $F'(x) = f(x)$. Soit G la fonction définie sur I par

$$G(x) = F(x) + C,$$

C étant une constante réelle arbitraire, sa dérivée en tout x de I est encore

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

puisque la dérivée d'une constante est nulle. Donc G est une primitive de f sur I. Réciproquement soit G une primitive de f sur I, les deux fonctions G et F ont même fonction dérivée f sur I donc (cf. § 3-1 c) elles diffèrent d'une constante. On peut énoncer :

Théorème.

Si une fonction f admet une primitive F sur un intervalle I (ouvert ou fermé), l'ensemble des primitives de f sur I est formé des fonctions F + C, C étant une fonction numérique constante arbitraire définie sur I.

Notons que, pour simplifier, si l'on a la fonction numérique : $x \longmapsto$ C définie sur I, la lettre C désignera la *constante réelle* et aussi la *fonction constante*. C'est un abus de langage.

Cherchons, parmi ces primitives, s'il en existe une prenant une valeur donnée λ arbitraire en un point donné x_0 de I. On aura pour une telle fonction :

$$F(x_0) + C = \lambda$$

d'où

$$C = \lambda - F(x_0)$$

et la fonction cherchée est définie sur I par :

$$F(x) + \lambda - F(x_0)$$

donc

Corollaire.

Si une fonction admet des primitives sur un intervalle, il en existe une et une seule prenant une valeur donnée arbitraire en un point donné de l'intervalle.

En particulier la primitive de f qui s'annule en un point x_0 de I s'obtient en prenant $\lambda = 0$. Elle est définie sur I par :

$$F(x) - F(x_0),$$

F étant une primitive quelconque de f sur I.

Remarque.

Dans le cas particulier où f est une fonction **continue** sur un segment $[a, b]$, on sait qu'une primitive de f sur $[a, b]$ est la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. La primitive de f qui s'annule au point x_0 de $[a, b]$ est donc définie sur $[a, b]$ par :

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt$$

c'est-à-dire, d'après la relation de Chasles,

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

En particulier pour $x_0 = a$ et $x = b$, on peut alors écrire

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt,$$

notons qu'à la place de la lettre t on peut mettre la lettre x ou toute autre lettre distincte des lettres a et b puisque son rôle est différent de celui de a et b. On convient aussi d'écrire

le nombre F (b) — F (a) sous la forme $[\mathrm{F}(x)]_a^b$. Notons que $[\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}]_a^b = [\mathrm{F}(x)]_a^b$. On a donc pour toute fonction f **continue** sur $[a, b]$, en désignant par F une primitive *quelconque* de f sur $[a, b]$:

$$\boxed{[\mathrm{F}(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

le symbole $[\mathrm{F}(x)]_a^b$ se lit « F (x) pris entre a et b ». D'une façon générale, si f est une fonction quelconque définie sur un intervalle I, soit a et b deux nombres quelconques de I, par convention : $[f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$.

5. 7 CALCUL DE PRIMITIVES

a) Primitives usuelles. Exercices résolus.

Des formules sur les dérivées, on déduit les formules sur les primitives suivantes, C désignant une constante réelle arbitraire. On vérifiera que les fonctions figurant dans la troisième colonne ont pour fonctions dérivées celles figurant dans la deuxième colonne, dans les conditions indiquées dans la première colonne.

	fonction	primitives
ensemble de définition de la fonction et de ses primitives : $\mathbb{R}$	0	C
— $\mathbb{R}$	a (constante)	$ax + \mathrm{C}$
— $\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}$
— $\mathbb{R}^*$	$x^n\,(n = 0$ ou n entier $< -1)$	(idem)
— $\mathbb{R}_+^*$	$x^r \quad (r \in \mathbb{Q} - \{-1\})$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + \mathrm{C}$
— $\mathbb{R}$	$\cos(ax + b) \quad , \quad a \neq 0$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax + b) + \mathrm{C}$
— $\mathbb{R}$	$\sin(ax + b) \quad , \quad a \neq 0$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax + b) + \mathrm{C}$
— $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2\,x$	$\mathrm{tg}\,x + \mathrm{C}$
— $]k\pi, \pi + k\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$	$\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \mathrm{cotg}^2\,x$	$-\mathrm{cotg}\,x + \mathrm{C}$
f et g ont pour primitives F et G sur un intervalle I	$f + g$	$\mathrm{F} + \mathrm{G} + \mathrm{C}$
λ réel donné, f a pour primitive F sur I	λf	$\lambda\mathrm{F} + \mathrm{C}$
f et g ont pour fonctions dérivées f' et g' sur I	$f'g + fg'$	$fg + \mathrm{C}$
f et g ont pour fonctions dérivées f' et g' sur I et $g(x) \neq 0$ pour tout x de I	$\dfrac{f'g - fg'}{g^2}$	$\dfrac{f}{g} + \mathrm{C}$
f a pour fonction dérivée f' sur I et $f^r : \; x \longmapsto [f(x)]^r$ définie sur I $(r \in \mathbb{Q} - \{-1\})$	$f^r f'$	$\dfrac{f^{r+1}}{r+1} + \mathrm{C}$

Nous allons donner quelques exemples d'application de ces formules en suivant l'ordre du tableau précédent. Le nombre C désignera une constante réelle arbitraire.

Exemples.

1. Une fonction polynôme f telle que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ définie sur $\mathbb{R}$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions polynômes F telles que

$$\mathrm{F}(x) = \frac{a_n}{n+1}\,x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}\,x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}\,x^2 + a_0 x + \mathrm{C}.$$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x$. Cherchons à mettre f sous la forme d'une *somme de fonctions de primitives connues*. On a pour tout x réel :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$

donc f est la somme de deux fonctions :

f_1 telle que $f_1(x) = \dfrac{1}{2}$ dont une primitive sur $\mathbb{R}$ est F_1 telle que $\mathrm{F}_1(x) = \dfrac{1}{2}\,x$

f_2 telle que $f_2(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x$ dont une primitive sur $\mathbb{R}$ est F_2 telle que

$\mathrm{F}_2(x) = -\dfrac{1}{4}\sin 2x$. La fonction f admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions F telles que

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\sin 2x + \mathrm{C}.$$

3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x - x\sin x$. On remarque que $\cos x - x\sin x = 1 \times \cos x + x(-\sin x)$ qui est de la forme $f_1'(x)\,g_1(x) + f_1(x)\,g_1'(x)$ avec $f_1(x) = x$ et $g_1(x) = \cos x$. Une primitive de $f_1'g_1 + f_1 g_1'$ est $f_1 g_1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions F telles que

$$\mathrm{F}(x) = x\cos x + \mathrm{C}.$$

4. Soit la fonction f définie sur $\mathrm{I} =]k\pi, \pi + k\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$ par

$$f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}.$$

On remarque que l'on peut écrire $f(x) = \dfrac{1 \times \sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$ qui est de la forme $\dfrac{f_1'(x)\,g_1(x) - f_1(x)\,g_1'(x)}{[g_1(x]^2}$ avec $f_1(x) = x$ et $g_1(x) = \sin x$.

Une primitive de $\dfrac{f_1'g_1 - f_1 g_1'}{g_1^2}$ sur I est $\dfrac{f_1}{g_1}$. La fonction f admet donc pour primitives sur I les fonctions F telles que :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x}{\sin x} + \mathrm{C}.$$

5. Soit les fonctions

f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \sin^4 x \cos x$

f_2 définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ par $f_2(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$

f_3 définie sur $]-1, 1[$ par $f_3(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

nous remarquons qu'elles sont toutes de la forme $\lambda f^r f'$ (λ réel, r rationnel $\neq -1$).

En effet :
$f_1(x) = \sin^4 x\,(\sin x)'$ de la forme $[f(x)]^4\,f'(x)$ avec $f(x) = \sin x$. Une primitive de $f^4 f'$ sur $\mathbb{R}$ est $\frac{f^5}{5}$. La fonction f_1 admet donc pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions F_1 telles que

$$F_1(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

De même

$f_2(x) = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2}(2x+1)^{-2}(2x+1)'$ de la forme $\frac{1}{2}[f(x)]^{-2} f'(x)$ avec $f(x) = 2x + 1$.

Une primitive de $f^{-2}f'$ sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ est $\frac{f^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{f}$. La fonction f_2 admet donc pour primitives sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ les fonctions F_2 telles que

$$F_2(x) = -\frac{1}{2(2x+1)} + C.$$

De même

$f_3(x) = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)'}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)'$ de la forme $-\frac{1}{2}[f(x)]^{-\frac{1}{2}} f'(x)$ avec $f(x) = 1 - x^2$.

Une primitive de $f^{-\frac{1}{2}}f'$ sur $]-1\,,1[$ est $\frac{f^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{f}$. La fonction f_3 admet donc pour primitives sur $]-1\,,1[$ les fonctions F_3 telles que

$$F_3(x) = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

EXERCICES

1. Trouver la primitive de $f : x \longmapsto x^3 + 2x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$, qui s'annule pour $x = -1$.
2. Trouver la primitive de $f : x \longmapsto x^3 + 5x^2 - x + 1 + \frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, qui s'annule pour $x = 2$.

Trouver les primitives, en précisant les ensembles de définition, des fonctions f telles que :

3. $f(x) = (x^2 + x - 1)^2$.
4. $f(x) = (x^3 + 3x + 1)^3 (x^2 + 1)$.
5. $f(x) = \frac{x^4 + 1}{(x^5 + 5x + 2)^2}$.
6. $f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x}{(x-1)^2}$ $\left(\text{on mettra } f(x) \text{ sous la forme } ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}\right)$.
7. $f(x) = \cos x \cos 3x$.
8. $f(x) = \sin^3 x$.
9. $f(x) = \cos^4 x$.
10. $f(x) = \sin^4 x \cos^3 x$.

11. $f(x) = \sin^4 x \cos^2 x$.
12. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$.
13. $f(x) = \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^n + 1}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

b) Intégration par parties.

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a\,,b]$. On sait que l'on a sur $[a\,,b]$:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Les fonctions f et g, étant dérivables sur $[a\,,b]$, sont continues sur $[a\,,b]$. Si, de plus, les *fonctions f' et g' sont continues sur* $[a\,,b]$, les fonctions $f'g$, fg', $(fg)' = f'g + fg'$ sont aussi continues sur $[a\,,b]$ donc intégrables sur $[a\,,b]$. Si $x \in [a\,,b]$, l'intégrale de $(fg)'$ sur $[a\,,x]$ est donc égale à l'intégrale de $f'g + fg'$ sur $[a\,,x]$:

$$\int_a^x [f(t)\,g(t)]'\,dt = \int_a^x [f'(t)\,g(t) + f(t)\,g'(t)]\,dt$$

le premier membre peut s'écrire (cf. § 5.6 c) : $[f(t)\,g(t)]_a^x$, on a donc :

$$[f(t)\,g(t)]_a^x = \int_a^x f'(t)\,g(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,g'(t)\,dt$$

ce qui permet de ramener le calcul de l'une des intégrales du second membre à celui de l'autre intégrale s'il est plus simple. Cette méthode de calcul s'appelle une **intégration par parties.** On peut énoncer :

Théorème.

Si f et g admettent des *fonctions dérivées continues* sur $[a\,,b]$ on a pour tout x de $[a\,,b]$:

$$\int_a^x f(t)\,g'(t)\,dt = [f(t)\,g(t)]_a^x - \int_a^x f'(t)\,g(t)\,dt$$

En particulier, dans les conditions précédentes, on peut écrire pour $x = b$:

$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt = [f(t)\,g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt.$$

Exemple.

6. Calculons $\int_0^x t \sin t\,dt$ $(x \in \mathbb{R})$.

Cette intégrale est de la forme $\int_0^x f(t)\,g'(t)\,dt$, avec $f(t) = t$ et $g'(t) = \sin t$.

Faisons une intégration par parties en prenant $f'(t) = 1$ et $g(t) = -\cos t$ (les fonctions f' et g' étant continues pour tout x réel, on peut appliquer le théorème)

$$\int_0^x t \sin t\,dt = [t(-\cos t)]_0^x - \int_0^x 1(-\cos t)\,dt$$

$$= -x\cos x + \int_0^x \cos t\,dt$$

$$= -x\cos x + \sin x$$

Remarque : il en résulte que la fonction : $x \longmapsto x \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions F telles que

$$F(x) = -x \cos x + \sin x + C \quad \text{(C constante réelle arbitraire).}$$

EXERCICE

14. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx$.

15. Soit l'intégrale $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ $(n \in \mathbb{N})$. En écrivant I_n sous la forme $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x \, dx$ pour $n > 1$, faire une intégration par parties et trouver une *relation de récurrence* entre I_n et I_{n-2}.

En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \, dx$.

III. Applications

Dans toutes les applications qui suivent (calcul d'une aire, d'un volume, d'une masse, d'un moment d'inertie, d'une distance, d'une quantité d'électricité, d'une énergie ou d'un travail), nous calculerons d'abord des intégrales de fonctions en escalier définies sur un segment [a , b]. Ces intégrales nous conduiront, chaque fois, à définir l'aire, le volume, . . ., comme étant une intégrale d'une fonction f définie sur [a , b]. Cette intégrale étant la borne commune de deux ensembles d'intégrales de fonctions en escalier qui encadrent f, ces dernières intégrales pourront être des valeurs approchées par défaut ou par excès de l'aire, du volume, . . .

5. 8 CALCUL D'AIRES

a) Notion d'aires.

Soit une fonction constante $f : x \longmapsto k \geqslant 0$ sur $[a, b]$ $(a < b)$ et la partie de $\mathbb{R}^2$ ensemble des couples de nombres réels (x, y) tels que

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) = k. \end{cases}$$

Dans le plan affine euclidien E_2 rapporté à un repère orthonormé, cette partie de $\mathbb{R}^2$ est représentée par un rectangle Δ que nous avons hachuré à la figure 6.

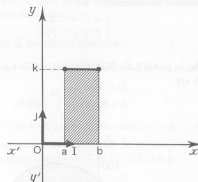


Fig. 6

Par définition, l'aire de Δ est $\mathcal{A}(\Delta) = k(b - a)$. On peut aussi écrire

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b k \, dx = k(b - a).$$

Soit f une fonction en escalier positive définie sur $[a, b]$ $(a < b)$ et la partie de $\mathbb{R}^2$ ensemble des couples de nombres réels (x, y) tels que

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x), \end{cases}$$

représentée à la figure 7 par un ensemble Δ que nous avons hachuré et qui est la réunion de rectangles. Nous dirons que l'aire $\mathcal{A}(\Delta)$ de Δ est la somme des aires de ces rectangles c'est-à-dire que, $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_{n+1}$ étant des nombres tels que

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$$

et f prenant une valeur constante λ_i sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$,

$$\mathcal{A}(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

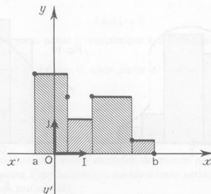


Fig. 7

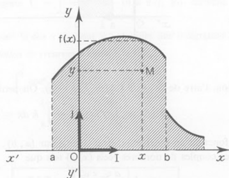
Plus généralement soit f une fonction intégrable, positive sur $[a, b]$ $(a < b)$ et la partie de $\mathbb{R}^2$ définie comme précédemment par

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

et représentée par la partie Δ du plan que nous avons hachurée à la figure 8. Par définition, l'aire de Δ est

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Fig. 8



Puisque $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, on a (cf. § 5.4 a) : $\mathcal{A}(\Delta) \geqslant 0$.

Ce nombre $\mathcal{A}(\Delta)$ est la borne supérieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier positives qui minorent f sur $[a, b]$ (cf. § 5.4, remarque) c'est-à-dire de l'ensemble des aires des parties associées à ces fonctions (fig. 9). Le nombre $\mathcal{A}(\Delta)$ est aussi la borne inférieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier positives qui majorent f sur $[a, b]$ c'est-à-dire de l'ensemble des aires des parties associées à ces fonctions (fig. 10).

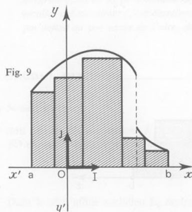


Fig. 9

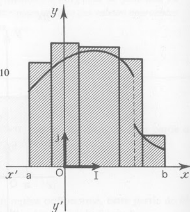


Fig. 10

Nous pouvons ainsi associer à certaines parties du plan affine euclidien E_2 un nombre positif ou nul appelé aire de cette partie. On dit que ces parties sont **quarrables.** Nous admettrons les propriétés suivantes :

Propriétés de l'ensemble $\mathcal{Q}$ des parties quarrables.

1. Si Δ et Δ' sont deux parties quelconques de $\mathcal{Q}$, on a

$$\Delta \cup \Delta' \in \mathcal{Q}$$
$$\Delta - \Delta' \in \mathcal{Q}$$

par suite $\Delta \cap \Delta' = \Delta - (\Delta - \Delta')$ et la partie vide $\varnothing = \Delta - \Delta$ appartiennent à $\mathcal{Q}$.

D'une façon générale un ensemble $\mathcal{C}$ non vide de parties d'un ensemble E s'appelle un *clan* si et seulement si, quels que soient X et X' de $\mathcal{C}$, on a

$$X \cup X' \in \mathcal{C}$$
$$X - X' \in \mathcal{C}.$$

L'ensemble $\mathcal{Q}$ des parties quarrables du plan affine euclidien E_2 est donc un clan.

2. Si Δ est une partie quarrable quelconque, toute partie isométrique à Δ est quarrable.

Propriétés de l'application $\mathcal{A}$: $\Delta \longmapsto \mathcal{A}(\Delta)$.

3. L'application $\mathcal{A}$ est une *mesure* définie sur $\mathcal{Q}$ c'est-à-dire une application de $\mathcal{Q}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que si Δ et Δ' sont deux parties quarrables quelconques disjointes :

$$\mathcal{A}(\Delta \cup \Delta') = \mathcal{A}(\Delta) + \mathcal{A}(\Delta').$$

Par suite on démontre que si Δ et Δ' sont deux parties quarrables quelconques :

$$\mathcal{A}(\Delta \cup \Delta') = \mathcal{A}(\Delta) + \mathcal{A}(\Delta') - \mathcal{A}(\Delta \cap \Delta')$$

et que si Δ et Δ' sont deux parties quarrables telles que $\Delta' \subset \Delta$ on a :

$$\mathcal{A}(\Delta') \leqslant \mathcal{A}(\Delta)$$

et le complémentaire de Δ' dans Δ a pour aire $\mathcal{A}(\Delta) - \mathcal{A}(\Delta')$.

On démontre aussi que :

$$\mathcal{A}(\varnothing) = 0$$

4. Si Δ est quarrable, toute partie Δ' isométrique à Δ a pour aire $\mathcal{A}(\Delta') = \mathcal{A}(\Delta)$.

5. Si Δ est quarrable et si $\mathcal{A}(\Delta) = 0$, toute partie Δ' incluse dans Δ est quarrable et $\mathcal{A}(\Delta') = 0$.

6. L'aire d'un segment est nulle.

7. Le carré (ouvert ou fermé) de côté 1 a pour aire 1.

Remarque : vous connaissez d'autres exemples de mesure possédant les propriétés 3 (la mesure des longueurs, l'application qui associe à toute partie d'un ensemble fini non vide son cardinal, une probabilité).

Exemples.

1\. Soit la fonction $f: \ x \longmapsto y = \sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$. On peut écrire

$$y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

et en posant $\begin{cases} 2x = X \\ y - \frac{1}{2} = Y, \end{cases}$

on a $Y = -\frac{1}{2}\cos X$, ce qui montre que la représentation graphique de f est une sinusoïde représentée à la figure 11. Calculons l'aire $\mathcal{A}(\Delta)$ de la partie hachurée ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant y \leqslant \sin^2 x. \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2x \, dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

On peut remarquer que $\mathcal{A}(\Delta)$ est égale à l'aire du rectangle OABC (fig. 11).

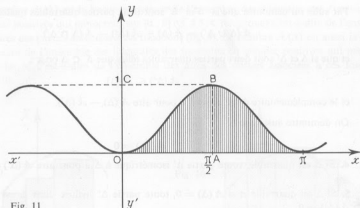


Fig. 11

2\. Soit la fonction $f: \ x \longmapsto y = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

On peut écrire pour tout $x \neq 0$,

$$y = 2x + 1 + x^{-2}$$

$$y' = 2 - 2x^{-3} = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^3}$$

le trinôme $x^2 + x + 1$ est du signe du coefficient de x^2 donc strictement positif quel que soit x car le discriminant est $-3 < 0$. D'où le tableau de variation dans lequel on a mis les limites remarquables :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

On vérifiera que la droite D d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote à la représentation graphique de f (fig. 12). Calculons l'aire $\mathcal{A}(\Delta)$ de la partie Δ définie par

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x + 1 \leqslant y \leqslant 2x + 1 + \frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

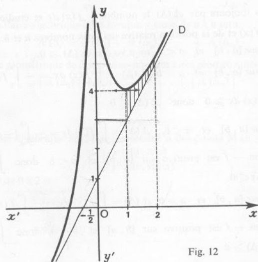


Fig. 12

Soit $\mathcal{A}(\Delta_1)$ l'aire de la partie Δ_1 définie par

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2x + 1 + \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

et $\mathcal{A}(\Delta_2)$ l'aire de la partie Δ_2 définie par

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2x + 1, \end{cases}$$

on a $\Delta_1 = \Delta \cup \Delta_2$

donc $\mathcal{A}(\Delta_1) = \mathcal{A}(\Delta) + \mathcal{A}(\Delta_2) - \mathcal{A}(\Delta \cap \Delta_2)$

mais $\Delta \cap \Delta_2$ est le segment de droite défini par $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ dont l'aire est nulle donc :

$$\mathcal{A}(\Delta_1) = \mathcal{A}(\Delta) + \mathcal{A}(\Delta_2)$$

l'aire cherchée est

$$\mathcal{A}(\Delta) = \mathcal{A}(\Delta_1) - \mathcal{A}(\Delta_2) = \int_1^2 \left(2x + 1 + \frac{1}{x^2}\right) dx - \int_1^2 (2x+1)\, dx$$

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_1^2 \left[\left(2x + 1 + \frac{1}{x^2}\right) - (2x+1)\right] dx$$

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

b) Extensions de la notion d'aire.

Soit E_2 le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et Δ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$$\begin{cases} x \in [a, b] \\ y \in [0, f(x)] \end{cases}$$

désignons toujours par $\mathcal{A}(\Delta)$ le nombre $\int_a^b f(x)\, dx$ et étudions son signe, suivant le signe de $f(x)$ et de la position relative des deux nombres a et b :

Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ et $a < b$, on a vu que $\mathcal{A}(\Delta) \geqslant 0$.

Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ et $a > b$, $\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$,

Or $\int_b^a f(x)\, dx \geqslant 0$ donc $\mathcal{A}(\Delta) \leqslant 0$.

Si $f \leqslant 0$ sur $[a, b]$ et $a < b$, $\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b f(x)\, dx = -\int_a^b [-f(x)]\, dx$,

la fonction $-f$ est positive sur $[a, b]$ et $a < b$ donc $\int_a^b [-f(x)]\, dx \geqslant 0$ par suite $\mathcal{A}(\Delta) \leqslant 0$.

Si $f \leqslant 0$ sur $[a, b]$ et $a > b$, $\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx = \int_b^a [-f(x)]\, dx$,

la fonction $-f$ est positive sur $[b, a]$ et $b < a$ donc $\int_b^a [-f(x)]\, dx \geqslant 0$ par suite $\mathcal{A}(\Delta) \geqslant 0$.

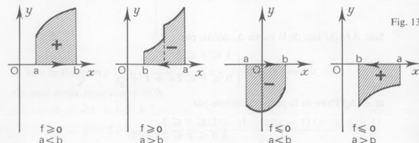


Fig. 13

Nous avons indiqué ces différents cas à la figure 13 en indiquant le signe de

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Il en résulte qu'à toute partie Δ de E_2 de la forme précédente, on peut associer un nombre réel positif, négatif ou nul qu'on appelle *aire algébrique* de Δ. Mais pour une *même partie* Δ définie à l'aide d'une *même fonction* f, le signe de cette aire algébrique change suivant que l'on prend $\int_a^b f(x)\, dx$ ou $\int_b^a f(x)\, dx$. Nous dirons que le nombre

$\mathcal{A}(\Delta) = \int_a^b f(x)\, dx$ est l'**aire algébrique de Δ lorsque x varie de a à b** (nous l'avons indiqué par une flèche rouge à la figure 13). Si $f(x)$ garde un signe constant sur $[a, b]$, par opposition, nous dirons que $|\mathcal{A}(\Delta)|$ est l'**aire géométrique** de Δ.

Si f est intégrable sur $[a, b]$, supposons qu'il existe un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de $[a, b]$ tels que $f(x)$ garde un signe constant sur $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$ et désignons par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ les parties de E_2 associées. Soit $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_n$:

D'après la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^b f(x)\, dx$$

c'est-à-dire que l'aire algébrique de Δ lorsque x varie de a à b sera

$$\mathcal{A}(\Delta) = \mathcal{A}(\Delta_1) + \mathcal{A}(\Delta_2) + \ldots + \mathcal{A}(\Delta_n)$$

tandis que l'aire géométrique de Δ sera la somme des aires géométriques de $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$:

$$|\mathcal{A}(\Delta_1)| + |\mathcal{A}(\Delta_2)| + \ldots + |\mathcal{A}(\Delta_n)|$$

Exemple.

3. Calculer l'aire algébrique $\mathcal{A}(\Delta)$ de l'ensemble Δ des points $M(x, y)$ tels que

$$\begin{cases} x \in [0, 2\pi] \\ y \in [0, \sin x] \end{cases}$$

lorsque x varie de 0 à 2π.

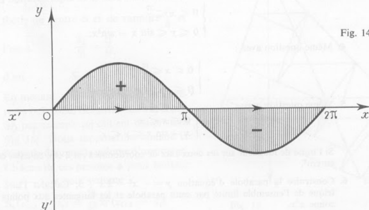


Fig. 14

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = 0,$$

ce résultat s'explique en remarquant que l'on a, d'après la relation de Chasles,

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$$

donc l'aire algébrique $\mathcal{A}(\Delta)$ est la somme des deux aires algébriques opposées :

$$\mathcal{A}(\Delta_1) = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$$

et

$$\mathcal{A}(\Delta_2) = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -2.$$

L'aire géométrique de Δ est $|\mathcal{A}(\Delta_1)| + |\mathcal{A}(\Delta_2)| = 4$.

EXERCICES

On supposera, dans tous ces exercices, le plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé.

1. Calculer l'aire géométrique du *segment de parabole* ensemble des points M (x, y) tels que :

$$\begin{cases} -a \leqslant x \leqslant a & (a > 0) \\ x^2 \leqslant y \leqslant a^2 \end{cases}$$

Soit A $(a, 0)$, B (a, a^2), C $(-a, a^2)$, D $(-a, 0)$. Montrer qu'elle est égale aux $\frac{2}{3}$ de l'aire géométrique du rectangle ABCD.

2. Calculer l'aire algébrique $\mathcal{A}(\lambda)$ de l'ensemble des points M (x, y) tels que :

$$\begin{cases} x \in [1, \lambda] & (\lambda > 0) \\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x^2}, \end{cases}$$

lorsque x varie de 1 à λ.
Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +0} \mathcal{A}(\lambda)$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

3. Calculer l'aire géométrique de l'ensemble des points M (x, y) tels que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x - \sin^2 x. \end{cases}$$

4. Même question avec :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \leqslant y \leqslant 4x - \operatorname{tg}^2 x. \end{cases}$$

5. Même question avec :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ x - \sin x \leqslant y \leqslant x. \end{cases}$$

Si l'unité de longueur sur les deux axes de coordonnées est 2 cm, calculer cette aire en cm².

6. Construire la parabole d'équation $y = -x^2 - 2x + 3$. Calculer l'aire géométrique de l'ensemble limité par cette parabole et les tangentes aux points où elle coupe $x'x$.

5. 9 CALCUL DE VOLUMES

a) Volume d'une pyramide.

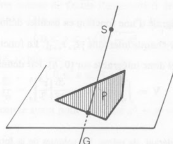


Fig. 15

Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, soit un point S et un polygone P dont le plan ne contient pas S. On appelle *surface pyramidale* de *sommet* S et de *directrice* le contour de P l'ensemble des droites G passant par S et rencontrant le contour de P (fig. 15). Toute droite G s'appelle une *génératrice* de la surface et toute génératrice contenant un sommet de la directrice s'appelle une *arête* de la surface. L'ensemble des points de l'espace limité par le sommet S, la surface pyramidale et un plan Π qui rencontre toutes les génératrices s'appelle une *pyramide* de sommet S. Le plan Π coupe les arêtes suivant les sommets d'un polygone qui est la *base* de la pyramide. Nous supposerons connue l'aire $\mathcal{B}$ de la base qui est la somme des aires de triangles dont la réunion est la base. Nous supposerons que l'on connaît également la distance h du sommet S au plan de la base. Cette distance s'appelle la *hauteur* de la pyramide. Soit un repère orthonormé d'origine S, l'axe Sz étant perpendiculaire au plan Π de la base et orienté de S vers le plan de base donc ce plan a pour équation $z = h$ $(h > 0)$. Si l'on coupe cette pyramide par des plans parallèles au plan Π et passant par les points de Sz de cotes z_1, z_2 ..., z_i, z_{i+1}, ..., z_n, z_n, z_{n+1} telles que

$$0 = z_1 < z_2 < \ldots < z_i < z_{i+1} < \ldots < z_n < z_{n+1} = h$$

les intersections sont des polygones d'aires S_i. Chacun de ces polygones est l'homothétique de la base dans l'homothétie de centre S et de rapport $\frac{z_i}{h}$ et

l'on a
$$\frac{S_i}{\mathcal{B}} = \frac{z_i^2}{h^2}$$

d'où
$$S_i = \frac{\mathcal{B}}{h^2} z_i^2$$

En menant par les sommets des différents polygones des parallèles à la droite SA par exemple on obtient des prismes (fig 16). Nous supposerons connue la formule donnant le volume d'un prisme. Chacun de ces prismes a pour hauteur $z_{i+1} - z_i$ et pour volume

$$S_i(z_{i+1} - z_i) = \frac{\mathcal{B}}{h^2} z_i^2 (z_{i+1} - z_i).$$

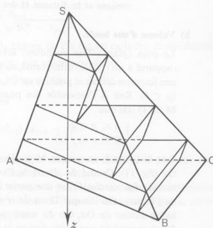


Fig. 16

Le volume de la réunion de ces prismes est

$$U=\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{B}}{h^2}\, z_i^2\, (z_{i+1}-z_i)$$

on reconnaît l'intégrale d'une fonction en escalier définie sur $[0, h]$ et prenant une valeur constante $\frac{\mathcal{B}}{h^2} z_i^2$ sur chaque intervalle $]z_i, z_{i+1}[$. La fonction $f: \quad z \longmapsto \frac{\mathcal{B}}{h^2} z^2$ est continue pour tout z réel donc intégrable sur $[0, h]$. Par définition, le volume de la pyramide est

$$V=\int_0^h \frac{\mathcal{B}}{h^2} z^2\, dz=\frac{\mathcal{B}}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h=\frac{\mathcal{B}}{h^2}\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\mathcal{B}h.$$

REMARQUE

En considérant, de même, les volumes de la forme $W=\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{B}}{h^2} z_{i+1}^2 (z_{i+1}-z_i)$, on montrera que V est la borne supérieure de l'ensemble des nombres U et la borne inférieure de l'ensemble des nombres W (la fonction f est strictement croissante sur $[0, h]$ et la démonstration est celle du § 5-3-b exemple 2).

EXERCICES

1. On appelle *tronc de pyramide à bases parallèles* la partie de l'espace limité par une surface pyramidale et deux plans parallèles rencontrant toutes les génératrices. Calculer le volume de cette partie connaissant les aires $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des deux bases parallèles et la distance H des plans de ces deux bases (distinguer deux cas).
2. On appelle *surface conique* de sommet S et de directrice un cercle C, dont le plan ne contient pas S, l'ensemble des droites G passant par S et rencontrant C. La partie de l'espace limitée par S, la surface conique et le plan du cercle C est un *cône* de sommet S et de directrice C. Calculer le volume de ce cône connaissant le rayon de C et la hauteur h du cône (distance de S au plan de C). (Le volume d'un cylindre à bases circulaires de rayon R_i et de hauteur h_i est $\pi R_i^2 h_i$.)
La partie de l'espace limitée par la surface conique et deux plans Π et Π' parallèles au plan de C est un *tronc de cône* à bases circulaires. Calculer son volume connaissant les rayons R et R' des deux cercles d'intersection de Π et Π' et de la surface conique et la distance H des deux plans Π et Π' (distinguer deux cas).

b) Volume d'une boule.

Le plan (plan affine euclidien) étant rapporté à un repère orthonormé, soit f une fonction définie et positive sur $[a, b]$ $(a < b)$. Soit Δ l'ensemble des points M (x, y) tels que

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

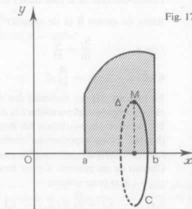


Fig. 17

Soit C le cercle contenant M et d'axe Ox (fig. 17). Quand M décrit Δ, l'ensemble des cercles C est une partie D de l'espace. On dit que D est de *révolution* autour de Ox. On dit aussi que D est engendrée par la révolution de Δ autour de Ox.

Cherchons à calculer le volume de la partie de l'espace limitée par une sphère de centre O et de rayon R, c'est-à-dire de la boule fermée ensemble des points M tels que $OM \leqslant R$, qui est de révolution autour de Ox. Son volume est le double du volume de la partie engendrée par la révolution autour de Ox de l'ensemble Δ des points M (x, y) tels que

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant R \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x^2}, \end{cases}$$

l'ensemble des points M (x, y) tels que

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant R \\ y = \sqrt{R^2-x^2} \end{cases}$$

étant un arc de cercle, ce cercle ayant pour équation $x^2+y^2=R^2$ (fig. 18).

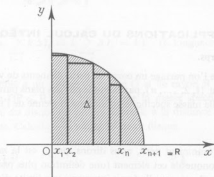


Fig. 18

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots x_n, x_{n+1}$ des points du segment $[O, R]$ tels que $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n < x_{n+1} = R$.
Considérons les rectangles Δ_i définis par

$$\begin{cases} x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x_{i+1}^2} \end{cases}$$

l'ensemble engendré par la révolution de Δ_i autour de Ox est un cylindre de révolution de rayon $\sqrt{R^2-x_{i+1}^2}$ et de hauteur $x_{i+1}-x_i$, son volume est donc

$$\pi\,(R^2-x_{i+1}^2)\,(x_{i+1}-x_i).$$

Le volume de la réunion de ces cylindres est

$$\sum_{i=1}^{n} \pi\,(R^2-x_{i+1}^2)\,(x_{i+1}-x_i)$$

on reconnaît l'intégrale d'une fonction en escalier définie sur $[O, R]$ et prenant une valeur constante $\pi\,(R^2-x_{i+1}^2)$ sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.
La fonction : $x \longmapsto \pi\,(R^2-x^2)$ est continue pour tout x réel donc intégrable sur $[O, R]$. On est alors amené à définir le volume de l'ensemble engendré par la révolution de Δ autour de x comme étant le nombre

$$\int_0^R \pi\,(R^2-x^2)\,dx.$$

Le volume de la boule limitée par la sphère est donc

$$V = 2\int_0^R \pi(R^2 - x^2)\,dx = 2\pi\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

EXERCICES

3. Calculer le volume de la partie engendrée par la révolution autour de Ox de l'ensemble Δ des points M (x, y) tels que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant y \leqslant \sin^2 x \end{cases}$$

4. Calculer le volume de la partie engendrée par la révolution autour de Oy de l'ensemble Δ des points M (x, y) tels que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a \\ x^2 \leqslant y \leqslant a^2. \end{cases}$$

5.10 AUTRES APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL

a) Masse d'un corps.

Supposons que l'on partage un corps en petits éléments de volume Δv_i et de masse Δm_i, avec i décrivant $\{1, 2, \ldots, n\}$, par exemple par des plans parallèles aux plans de coordonnées. On appelle masse spécifique volumique moyenne de l'un de ces éléments le rapport

$$\mu_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta v_i}.$$

Si Δv_i est suffisamment petit, nous dirons que μ_i est la *masse spécifique volumique en un point* quelconque de cet élément (une définition plus précise ne peut être donnée au niveau de cette classe, car elle ferait intervenir une limite d'une fonction de 3 variables).

La masse du corps est $M = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \Delta v_i$.

Cas particuliers : si on peut assimiler le corps à une portion de surface que l'on partage en n petits éléments d'aire ΔS_i et de masse Δm_i, on définira de même la *masse spécifique superficielle* moyenne d'un élément

$$\mu_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta S_i}$$

qui sera aussi la masse spécifique superficielle en tout point de cet élément. Si, enfin, on peut assimiler le corps à un arc de courbe que l'on partage en n petits arcs de longueur Δl_i et de masse Δm_i, la *masse spécifique linéaire* moyenne de l'un de ces petits arcs est

$$\mu_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta l_i},$$

c'est aussi la masse spécifique linéaire en tout point du petit arc. Dans ces deux cas particuliers, la masse du corps est respectivement

$$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \Delta S_i$$

et $$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \Delta l_i$$

Plus généralement, supposons que l'on connaisse une fonction f : $P \longmapsto \mu = f(P)$ qui associe à tout point P d'un corps un nombre $\mu > 0$ qui est la masse spécifique volumique ou superficielle ou linéaire en ce point, cherchons à calculer la masse M de ce corps. Nous ne traiterons et proposerons que des exemples simples.

Tout d'abord si f est une constante $k > 0$ pour tout point du corps, on dit que le corps est *homogène* et, suivant le cas,

$$M = \sum_{i=1}^{n} k\,\Delta v_i = k\sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = k\,V \quad \text{(V volume du corps)}$$

ou

$$M = \sum_{i=1}^{n} k\,\Delta S_i = k\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = k\,S$$ (S aire de la portion de surface qui constitue le corps)

ou

$$M = \sum_{i=1}^{n} k\,\Delta l_i = k\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = k\,L$$ (L longueur de l'arc de courbe qui constitue le corps).

Soit un corps assimilé à un disque de centre O et de rayon R (ensemble des points P d'un plan tels que OP $\leqslant$ R). On suppose que la masse spécifique superficielle en un point P quelconque du disque est proportionnelle à la distance du point à un diamètre déterminé du disque. Calculons la masse M de ce disque.

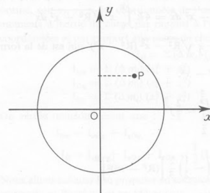


Fig. 19

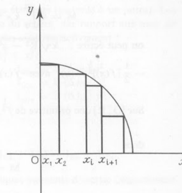


Fig. 20

Choisissons un repère orthonormé de manière que l'origine soit le centre O du disque et l'axe $y'y$ soit porté par le diamètre précédent (fig. 19). La masse spécifique superficielle en un point P (x, y) du disque est de la forme

$$\mu = k\,|x| \qquad (k \text{ constante positive donnée}).$$

En raison des symétries évidentes par rapport à Ox et Oy, on peut se contenter de calculer la masse de la partie Δ du disque ensemble des points P (x, y) tels que

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant R \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}$$

Soit les points du segment [O, R] tels que

$$0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n < x_{n+1} = \mathrm{R}.$$

Considérons les rectangles Δ_i (fig. 20) ensembles des points P (x, y) tels que

$$\begin{cases} x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{\mathrm{R}^2 - x_{i+1}^2} \end{cases}$$

l'aire de Δ_i est

$$\Delta \mathrm{S}_i = \sqrt{\mathrm{R}^2 - x_{i+1}^2}\,(x_{i+1} - x_i)$$

sa masse est (en supposant que $x_{i+1} - x_i$ est suffisamment petit pour que la masse spécifique superficielle μ_i soit la même en tout point du rectangle) :

$$\Delta m_i = \mu_i \Delta \mathrm{S}_i = k\, x_{i+1} \sqrt{\mathrm{R}^2 - x_{i+1}^2}\,(x_{i+1} - x_i)$$

la masse de la réunion de ces rectangles est

$$\sum_{i=1}^{n} k\, x_{i+1} \sqrt{\mathrm{R}^2 - x_{i+1}^2}\,(x_{i+1} - x_i)$$

on reconnaît l'intégrale d'une fonction en escalier définie sur [O , R] et prenant une valeur constante $k\, x_{i+1} \sqrt{\mathrm{R}^2 - x_{i+1}^2}$ sur chaque intervalle $]x_i\,, x_{i+1}[$.

La fonction : $x \longmapsto k\,x \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}$ est continue sur [O , R] donc intégrable sur ce segment. La masse de la partie Δ du disque est

$$\int_0^{\mathrm{R}} k\,x \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}\,dx$$

et la masse du disque est

$$\mathrm{M} = 4\int_0^{\mathrm{R}} k\,x \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}\,dx = 4k \int_0^{\mathrm{R}} x \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}\,dx$$

on peut écrire : $x\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}\,(\mathrm{R}^2 - x^2)'$ qui est de la forme

$-\frac{1}{2}\,[f(x)]^{\frac{1}{2}} f'(x)$ avec $f(x) = \mathrm{R}^2 - x^2$.

Sur [O , R] une primitive de $f^{\frac{1}{2}} f'$ est $\dfrac{f^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}}$

donc

$$\mathrm{M} = 4k\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}\left[(\mathrm{R}^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\mathrm{R}}$$

$$\mathrm{M} = \frac{4}{3} k\,\mathrm{R}^3.$$

EXERCICES

1. Un corps est assimilé à un segment de droite de longueur $2\,l$. On suppose que la masse spécifique linéaire en un point quelconque du segment est inversement proportionnelle au carré de la distance du point au milieu du segment. Calculer la masse de ce corps.
2. Un corps est assimilé à un cercle de rayon R. On suppose que la masse spécifique linéaire en un point quelconque P du cercle est proportionnelle à la longueur de l'arc AP (A point fixe du cercle). Calculer la masse de ce corps.
3. Soit une boule fermée de centre O et de rayon R. La masse spécifique volumique en un point quelconque de la boule est proportionnelle à la distance du point au centre O. Calculer la masse M de cette boule. (On considérera des sphères de centre O et de rayons $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots, \mathrm{R}_i, \mathrm{R}_{i+1}, \ldots, \mathrm{R}_n, \mathrm{R}_{n+1}$ tels que

$$0 = \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2 < \ldots < \mathrm{R}_i < \mathrm{R}_{i+1} < \ldots < \mathrm{R}_n < \mathrm{R}_{n+1} = \mathrm{R}.$$

Si $\mu = k\mathrm{OP}$ est la masse spécifique volumique au point P, la masse de la partie de la boule limitée par les sphères de centre O et de rayon R_i et R_{i+1} est :

$$\Delta m_i \simeq k\mathrm{R}_i \times \Delta v_i$$

$$\Delta m_i \simeq k\mathrm{R}_i \times \frac{4}{3}\pi\,(\mathrm{R}_{i+1}^3 - \mathrm{R}_i^3) \simeq k\mathrm{R}_i \times \frac{4}{3}\pi \times 3\,\mathrm{R}_i^2\,\Delta\mathrm{R}_i,$$

en posant $\Delta\mathrm{R}_i = \mathrm{R}_{i+1} - \mathrm{R}_i$). (On trouve $\mathrm{M} = k\pi\mathrm{R}^4$).

b) Moments d'inertie.

Si un point matériel P de masse m est à la distance d d'un point O ou d'une droite Δ ou d'un plan Π, on appelle moment d'inertie du point P par rapport au point O ou à la droite Δ ou au plan Π le produit : md^2.

Supposons que l'on partage un corps en n petits éléments de masse $\Delta\, m_i$ à la distance d_i (supposée constante pour tout point de chaque élément) de O ou Δ ou π. Le moment d'inertie du corps par rapport à O ou Δ ou π est la somme :

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta\, m_i)\, d_i^2$$

que nous écrirons simplement : $\Sigma\,(\Delta\, m_i)\, d_i^2$.

L'espace (espace affine euclidien de dimension 3) étant rapporté à un repère orthonormé, soit x_i, y_i, z_i les cordonnées de l'un de ces éléments (assimilé à un point). Les moments d'inertie du corps par rapport à l'origine du repère, par rapport aux axes de coordonnées et par rapport aux plans de coordonnées sont respectivement :

$$\mathrm{I_O} = \Sigma\,(\Delta\, m_i)\,(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

$$\mathrm{I}_{\mathrm{O}x} = \Sigma\,(\Delta\, m_i)\,(y_i^2 + z_i^2) \qquad \mathrm{I}_{x\mathrm{O}y} = \Sigma\,(\Delta\, m_i)\, z_i^2$$

$$\mathrm{I}_{\mathrm{O}y} = \Sigma\,(\Delta\, m_i)\,(z_i^2 + x_i^2) \qquad \mathrm{I}_{y\mathrm{O}z} = \Sigma\,(\Delta\, m_i)\, x_i^2$$

$$\mathrm{I}_{\mathrm{O}z} = \Sigma\,(\Delta\, m_i)\,(x_i^2 + y_i^2) \qquad \mathrm{I}_{z\mathrm{O}x} = \Sigma\,(\Delta\, m_i)\, y_i^2$$

On vérifie immédiatement que :

$$\mathrm{I}_{\mathrm{O}x} = \mathrm{I}_{x\mathrm{O}y} + \mathrm{I}_{z\mathrm{O}x}$$

$$\mathrm{I_O} = \mathrm{I}_{x\mathrm{O}y} + \mathrm{I}_{y\mathrm{O}z} + \mathrm{I}_{z\mathrm{O}x} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{I}_{\mathrm{O}x} + \mathrm{I}_{\mathrm{O}y} + \mathrm{I}_{\mathrm{O}z}) = \mathrm{I}_{\mathrm{O}x} + \mathrm{I}_{y\mathrm{O}z}.$$

Nous allons calculer (ou proposer en exercices) quelques moments d'inertie fréquemment employés en Physique et en Mécanique.

Exemple 1. Une barre homogène est assimilée à un segment de droite de longueur $2\,l$. On connaît sa masse M. Calculons son moment d'inertie par rapport au milieu du segment.

Choisissons un axe $x'x$ porté par le segment, l'origine O étant le milieu du segment (fig. 21).

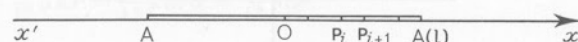


Fig. 21

En raison de la symétrie par rapport à O, le moment d'inertie cherché est le double du moment d'inertie du segment [O , A] par rapport à O. Soit les points $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$, ..., $P_i(x_i)$, $P_{i+1}(x_{i+1})$, ..., $P_n(x_n)$, $P_{n+1}(x_{n+1})$ tels que :

$$0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n < x_{n+1} = l.$$

La barre étant homogène, la masse spécifique linéaire μ est constante en tout point de la barre. La masse d'un élément $[P_i , P_{i+1}]$ est :

$$\Delta m_i = \mu (x_{i+1} - x_i)$$

son moment d'inertie par rapport à O est :

$$(\Delta m_i)\, d_i^2 \simeq \mu (x_{i+1} - x_i)\, x_i^2$$

et le moment d'inertie de la réunion de ces éléments $[P_i , P_{i+1}]$ par rapport à O est :

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta m_i)\, d_i^2 \simeq \sum_{i=1}^{n} \mu\, x_i^2 (x_{i+1} - x_i)$$

on reconnaît l'intégrale d'une fonction en escalier définie sur $[0 , l]$ et prenant une valeur constante μx_i^2 sur chaque intervalle $]x_i , x_{i+1}[$. La fonction : $x \longmapsto \mu x^2$ est continue sur $[0 , l]$ donc intégrable sur ce segment. Le moment d'inertie, par rapport à O, du segment de droite [O , A] est

$$\int_0^l \mu x^2\, dx = \mu \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{1}{3} \mu l^3.$$

Le moment d'inertie de toute la barre par rapport à O est

$$I_O = 2 \int_0^l \mu x^2\, dx = \frac{2}{3} \mu l^3.$$

La masse de la barre est $\quad M = \mu \times 2l$

donc $\quad I_O = \frac{2}{3} \mu l^3 = 2\mu l \times \frac{l^2}{3} = \frac{M l^2}{3}.$

Exemple 2. On donne une plaque rectangulaire homogène de masse M, dont les côtés ont pour longueur a et b. Calculons le moment d'inertie de cette plaque par rapport à l'un des axes de symétrie de la plaque.

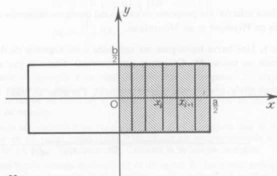


Fig. 22

Considérons les points du segment $\left[0 , \frac{a}{2}\right]$ tels que

$$0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n < x_{n+1} = \frac{a}{2}.$$

Soit Δ_i le rectangle (fig. 22) ensemble des points P (x, y) tels que

$$\begin{cases} x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \\ -\frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{2} \end{cases}$$

son aire est :

$$b\,(x_{i+1} - x_i).$$

Si μ est la masse spécifique superficielle constante en tout point du rectangle, puisque la plaque est homogène, la masse de Δ_i est :

$$\Delta m_i = \mu\, b\, (x_{i+1} - x_i)$$

et le moment d'inertie de Δ_i par rapport à Oy est :

$$(\Delta m_i)\, x_i^2 = \mu\, b\, (x_{i+1} - x_i)\, x_i^2$$

Le moment d'inertie, par rapport à Oy, de la réunion des rectangles Δ_i quand i décrit $\{1, 2, \ldots, n\}$ est :

$$\sum_{i=1}^{n} \mu\, b x_i^2\, (x_{i+1} - x_i)$$

qui est encore l'intégrale d'une fonction en escalier définie sur $\left[0 , \frac{a}{2}\right]$ et prenant une valeur constante $\mu\, b x_i^2$ sur chaque intervalle $]x_i , x_{i+1}[$. La fonction : $x \longmapsto \mu b x^2$ est continue sur $\left[0 , \frac{a}{2}\right]$ donc intégrable sur ce segment. Le moment d'inertie, par rapport à Oy, de la partie définie par

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{2} \end{cases}$$

est $\quad \int_0^{\frac{a}{2}} \mu\, b x^2\, dx = \mu b \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{24} \mu b a^3$

Le moment d'inertie de la plaque par rapport à Oy est

$$I_{Oy} = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \mu b x^2\, dx = \frac{1}{12} \mu b a^3.$$

La masse de la plaque est $\quad M = \mu\, ab$

donc $\quad I_{Oy} = \frac{1}{12} \mu b a^3 = \frac{1}{12} \mu\, ab\, a^2 = \frac{1}{12} M a^2.$

De même $\quad I_{Ox} = \frac{1}{12} M b^2.$

Si Oz est perpendiculaire en O au plan (xOy), le moment d'inertie d'un ensemble de points $P_i\ (x_i, y_i)$ de masse Δm_i par rapport à Oz est

$$\Sigma (\Delta m_i)(x_i^2 + y_i^2) = \Sigma (\Delta m_i)\, x_i^2 + \Sigma (\Delta m_i)\, y_i^2$$

donc le moment d'inertie de la plaque par rapport à Oz est :

$$I_{Oz} = I_{Ox} + I_{Oy} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

EXERCICES

4. L'espace affine euclidien de dimension 3 étant rapporté à un repère orthonormé, soit le pavé ensemble des points $P(x, y, z)$ tels que :

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{2} \\ -\frac{c}{2} \leqslant z \leqslant \frac{c}{2} \end{cases}$$

(on dit encore qu'on a un parallélépipède rectangle dont les arêtes ont pour longueurs a, b, c). On suppose que ce pavé est un corps homogène de masse M. Calculer les moments d'inertie du pavé par rapport aux plans de coordonnées. [On partagera le pavé en plaques rectangulaires d'axe Oz et d'épaisseur $z_{i+1} - z_i$. On montrera que le moment d'inertie d'une telle plaque de masse M_i par rapport au plan (xOz) est $\frac{1}{12} M_i b^2$, avec $M_i = \mu\, ab\, (z_{i+1} - z_i)$, μ étant la masse spécifique volumique constante en tout point du pavé. On calculera ensuite le moment d'inertie par rapport à (xOz) de l'ensemble de ces plaques et on déduira le moment d'inertie I_{xOz} du pavé. Réponse : $I_{xOz} = \frac{1}{12} Mb^2$].
Calculer les moments d'inertie du pavé par rapport à O, par rapport aux axes de coordonnées.

5. Calculer le moment d'inertie d'un disque homogène de rayon R et de masse M par rapport à son centre O, par rapport à un diamètre Ox (on partagera le disque à l'aide de cercles de centre O et de rayon R_i. Réponse : $I_O = \frac{MR^2}{2}$. Si Oy est un diamètre perpendiculaire à Ox, $I_O = I_{Ox} + I_{Oy} = 2\, I_{Ox}$ d'où $I_{Ox} = \frac{MR^2}{4}$).

6. Calculer le moment d'inertie d'un cylindre de révolution homogène de rayon R, de hauteur h et de masse M par rapport à son axe Oz (utiliser des cylindres de révolution d'axe Oz, de rayon R_i et de hauteur h. Réponse : $I_{Oz} = \frac{MR^2}{2}$).

7. Calculer le moment d'inertie d'une boule homogène de rayon R et de masse M par rapport à son centre O, par rapport à un diamètre Oz (on partagera la boule à l'aide de sphères de centre O et de rayon R_i. Réponses : $I_O = \frac{3}{5} MR^2$; $I_{Oz} = \frac{2}{5} MR^2$).

c) Vitesse et distance.

Soit un point M animé d'un mouvement rectiligne sur un axe $x'x$ muni d'un repère $(O, \vec{i})$. Supposons ce mouvement rectiligne défini sur un intervalle de temps I par l'équation horaire : $x = f(t)$. On sait que la vitesse moyenne du point M entre les instants t_1 et t_2 de I est $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ et que la vitesse du point M à l'instant t_1 est la limite au point t_1, si elle existe, du rapport précédent, c'est-à-dire la dérivée de la fonction f au point t_1.
Inversement cherchons à calculer la distance parcourue connaissant la vitesse à tout instant. Considérons l'intervalle de temps $I = [t_1, t_2]$ $(t_1 < t_2)$ et des instants $t'_1, t'_2, \ldots, t'_i, t'_{i+1}, \ldots, t'_n, t'_{n+1}$ de $[t_1, t_2]$ tels que

$$t_1 = t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_i < t'_{i+1} < \ldots < t'_n < t'_{n+1} = t_2.$$

Supposons que l'on ait une fonction $g : t \longmapsto v = g(t)$ en escalier définie sur $[t_1, t_2]$ et prenant une valeur constante v_i qui est la vitesse du point M sur chaque intervalle $]t'_i, t'_{i+1}[$. Si le point mobile est en M_1 à l'instant t_1 et en M_2 à l'instant t_2, on a

$$\overline{M_1M_2} = v_1 (t'_2 - t'_1) + v_2 (t'_3 - t'_2) + \ldots + v_n (t'_{n+1} - t'_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i (t'_{i+1} - t'_i),$$

c'est l'intégrale de la fonction en escalier g définie sur $[t_1, t_2]$.
Plus généralement supposons que l'on connaisse une fonction $g : t \longmapsto v = g(t)$ qui associe à tout instant t de $[t_1, t_2]$ un nombre réel v qui est la vitesse du point M à l'instant t. Si g est intégrable sur $[t_1, t_2]$, on peut définir la distance algébrique parcourue par M entre les instants t_1 et t_2 comme étant l'intégrale :

$$\overline{M_1M_2} = \int_{t_1}^{t_2} g(t)\, dt$$

qu'on peut écrire

$$\int_{t_1}^{t_2} v\, dt.$$

EXERCICE

8. La vitesse v d'un train est définie de la manière suivante sur l'intervalle de temps $[0, 10]$, les distances étant évaluées en km, les temps en mn et les vitesses en km/mn :

si $0 \leqslant t < 1$, $v = t^2$
$1 \leqslant t < 2$, $v = t$
$2 \leqslant t < 9$, $v = 2$
$9 \leqslant t < 10$, $v = -2t + 20.$

Calculer la distance parcourue par le train entre les instants 0 et 10.

d) Intensité et quantité d'électricité.

Si l'intensité i d'un courant électrique est constante pendant la durée Δt, la quantité d'électricité transportée par le courant est

$$\Delta q = i\, \Delta t.$$

Considérons l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ $(t_1 < t_2)$ et des instants $t'_1, t'_2, \ldots, t'_k, t'_{k+1}, \ldots, t'_n, t'_{n+1}$ de $[t_1, t_2]$ tels que

$$t_1 = t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_k < t'_{k+1} < \ldots < t'_n < t'_{n+1} = t_2,$$

supposons que l'on ait une fonction $f : t \longmapsto i = f(t)$ en escalier définie sur $[t_1, t_2]$ et prenant une valeur constante i_k qui est l'intensité du courant sur chaque intervalle $]t'_k, t'_{k+1}[$. La quantité d'électricité transportée dans l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, c'est-à-dire entre l'instant t_1 et l'instant t_2, est

$$q = \sum_{k=1}^{n} i_k \, (t'_{k+1} - t'_k),$$

c'est l'intégrale de la fonction en escalier f définie sur $[t_1, t_2]$.

Si l'on suppose maintenant que $f : t \longmapsto i = f(t)$ est une fonction intégrable sur $[t_1, t_2]$, la quantité d'électricité transportée par le courant dans l'intervalle $[t_1, t_2]$ est

$$q = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \, dt$$

qu'on peut écrire

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i \, dt.$$

Calculons, à titre d'exercice, la quantité d'électricité transportée pendant une alternance c'est-à-dire pendant une demi-période sachant que

$$i = \mathrm{I}_m \sin \omega t.$$

Si l'on désigne par T la période de ce courant alternatif, $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (si $\omega > 0$) et on a

$$q = \int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} i \, dt = \int_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} \mathrm{I}_m \sin \omega t \, dt$$

$$q = \left[-\frac{\mathrm{I}_m}{\omega} \cos \omega t \right]_0^{\frac{\mathrm{T}}{2}} = \frac{2\,\mathrm{I}_m}{\omega} = \frac{\mathrm{I}_m \mathrm{T}}{\pi}.$$

EXERCICE

9. Calculer la quantité d'électricité transportée par le courant précédent pendant une période.

e) Puissance et énergie.

Si la puissance P d'un système est constante pendant la durée Δt, l'énergie qu'il fournit pendant Δt est :

$$\Delta \mathrm{W} = \mathrm{P} \, \Delta t.$$

Si l'on considère un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ et des instants tels que l'on ait

$$t_1 = t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_i < t'_{i+1} < \ldots < t'_n < t'_{n+1} = t_2,$$

si l'on a une fonction $f : t \longmapsto \mathrm{P} = f(t)$ en escalier définie sur $[t_1, t_2]$ et prenant une valeur constante P_i qui est la puissance fournie par le système sur chaque intervalle $]t'_i, t'_{i+1}[$, l'énergie fournie par le système dans l'intervalle $[t_1, t_2]$ est

$$\mathrm{W} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i \, (t_{i+1} - t_i),$$

c'est l'intégrale de la fonction en escalier f définie sur $[t_1, t_2]$.

Si l'on suppose maintenant que $f : t \longmapsto \mathrm{P} = f(t)$ est une fonction intégrable sur $[t_1, t_2]$, l'énergie fournie dans l'intervalle $[t_1, t_2]$ est

$$\mathrm{W} = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \, dt$$

que nous écrirons encore

$$\mathrm{W} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{P} \, dt.$$

Calculons, à titre d'exercice, l'énergie calorifique dépensée pendant une période T dans une résistance de mesure R traversée par un courant alternatif d'intensité $i = \mathrm{I}_m \sin \omega t$. On sait que la puissance calorifique est, à l'instant t :

$$\mathrm{P} = \mathrm{R} i^2 = \mathrm{RI}_m^2 \sin^2 \omega t$$

D'où

$$\mathrm{W} = \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{RI}_m^2 \sin^2 \omega t \, dt = \mathrm{RI}_m^2 \int_0^{\mathrm{T}} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \, dt$$

$$\mathrm{W} = \mathrm{RI}_m^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right]_0^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2} \mathrm{RI}_m^2 \mathrm{T}.$$

Remarque.

L'intensité efficace I_e est celle d'un courant continu qui, dans la même résistance, pendant la même durée T, produirait la même énergie calorifique. Cette énergie calorifique serait $\mathrm{RI}_e^2\mathrm{T}$. On a donc

$$\mathrm{RI}_e^2 \mathrm{T} = \frac{1}{2} \mathrm{RI}_m^2 \mathrm{T}$$

d'où

$$\mathrm{I}_e = \frac{\mathrm{I}_m}{\sqrt{2}}$$

On a aussi

$$\mathrm{RI}_e^2 \mathrm{T} = \frac{1}{2} \mathrm{RI}_m^2 \mathrm{T} = \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{RI}_m^2 \sin^2 \omega t \, dt$$

donc

$$\mathrm{I}_e^2 = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_m^2 \sin^2 \omega t \, dt$$

$$\mathrm{I}_e^2 = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} i^2 \, dt,$$

on voit que I_e^2 est la moyenne de la fonction : $t \longmapsto i^2$ sur $[0, \mathrm{T}]$. D'une façon générale, si f est une fonction périodique de période T et si f^2 est intégrable sur $[0, \mathrm{T}]$, **la valeur efficace de la fonction périodique** f est le nombre positif tel que son carré est :

$$\frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} [f(t)]^2 \, dt$$

ce qui n'est autre que la moyenne de f^2 sur $[0, \mathrm{T}]$.

EXERCICE

10. Entre deux points d'un circuit électrique il y a une différence de potentiel :

$$v = \mathrm{V}_m \sin \omega t$$

et l'intensité du courant est

$$i = \mathrm{I}_m \sin (\omega t - \varphi).$$

Calculer l'énergie mise en jeu pendant une période (on rappelle que la puissance à l'instant t est $\mathrm{P} = vi$). Calculer la puissance moyenne $\dfrac{1}{\mathrm{T}} \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} vi \, dt$. (Réponse : cette puissance moyenne est $\mathrm{V}_e \mathrm{I}_e \cos \varphi$, V_e étant la différence de potentiel efficace, I_e l'intensité efficace, $\cos \varphi$ s'appelle le facteur de puissance.)

f) Pression et travail.

Soit, dans un cylindre, un gaz exerçant sur un piston une pression constante p (fig. 23). Si S est l'aire de la base du cylindre ou du piston, la force exercée par le gaz sur le piston est

$$F = pS$$

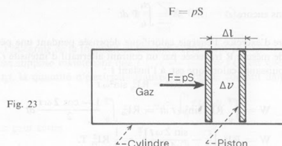


Fig. 23

Si le gaz déplace le piston de Δl, le travail fourni par le gaz est

$$\Delta W = F \times \Delta l = pS \times \Delta l = p\Delta v,$$

$\Delta v = S \times \Delta l$ représentant l'accroissement de volume du gaz.
Si l'on considère maintenant des volumes du gaz tels que l'on ait :

$$v_1 = v'_1 < v'_2 < \ldots < v'_i < v'_{i+1} < \ldots < v'_n < v'_{n+1} = v_2$$

et si l'on suppose que la pression est une constante p_i sur chaque intervalle $]v'_i, v'_{i+1}[$, le travail fourni par le gaz est

$$W = \sum_{i=1}^{n} p_i (v'_{i+1} - v'_i)$$

c'est l'intégrale d'une fonction en escalier définie sur $[v_1, v_2]$ et prenant une valeur constante p_i sur chaque intervalle $]v'_i, v'_{i+1}[$.

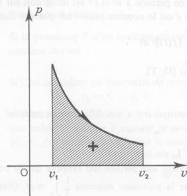


Fig. 24

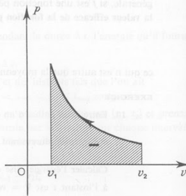


Fig. 25

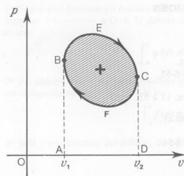


Fig. 26

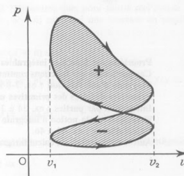


Fig. 27

Dans la pratique, la pression ne varie pas par « à-coups » mais d'une façon continue c'est-à-dire que la fonction : $v \longmapsto p$ est continue sur $[v_1, v_2]$. Supposons $v_1 < v_2$, le travail $W = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv > 0$ est un travail moteur, fourni par le gaz. Il est proportionnel à l'aire de la partie du plan que nous avons hachuré (fig. 24). Tandis que le travail $W = \int_{v_2}^{v_1} p\,dv < 0$ est un travail résistant, reçu par le gaz (fig. 25).

Si l'on a $f_1 : v \longmapsto p_1 = f_1(v)$ qui est une fonction continue sur $[v_1, v_2]$
et $f_2 : v \longmapsto p_2 = f_2(v)$ également continue sur $[v_1, v_2]$,
le volume du gaz augmentant de v_1 à v_2 dans le premier cas et diminuant de v_2 à v_1 dans le second cas, le travail fourni par le gaz est :

$$W = \int_{v_1}^{v_2} p_1\,dv + \int_{v_2}^{v_1} p_2\,dv = \int_{v_1}^{v_2} p_1\,dv - \int_{v_1}^{v_2} p_2\,dv$$

$$W = \int_{v_1}^{v_2} (p_1 - p_2)\,dv$$

ce travail est proportionnel à la différence : aire (ABECD) — aire (ABFCD) (fig. 26) c'est-à-dire à l'aire de la partie hachurée limitée par la courbe fermée. On aura $W > 0$ si $p_1 \geqslant p_2$ sur $[v_1, v_2]$ c'est-à-dire lorsque la courbe est décrite « dans le sens des aiguilles d'une montre » et on aura $W < 0$ si $p_1 \leqslant p_2$ sur $[v_1, v_2]$ c'est-à-dire lorsque la courbe est décrite en sens contraire.
Si le diagramme réel est représenté par la figure 27, comme c'est le cas d'un moteur à explosion à quatre temps, le travail fourni par l'agent thermique (ou gaz) est proportionnel à la différence des aires des deux parties hachurées puisque les deux courbes fermées qui limitent ces parties sont décrites en sens contraires.

EXERCICE

11. Le diagramme étant celui de la figure 27, la plus grande aire mesure 14 cm², la plus petite 2 cm². En abscisses, cm correspond à un volume de 200 cm³; en ordonnées, 1 cm correspond à une pression de 0,5 kgp/cm².

1. Calculer le travail correspondant à ce diagramme.

2. Le moteur contient 4 cylindres identiques et fait 40 tours par seconde (pour chaque cylindre il y a 20 diagrammes décrits par seconde). Calculer la puissance de ce moteur.

EXERCICES

Propriétés des fonctions intégrables.

5.1 Soit une fonction f intégrable sur $[a, b]$. Démontrer que si f est positive sur $[a, b]$ (c'est-à-dire que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[a, b]$), la fonction

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

définie sur $[a, b]$, est croissante sur $[a, b]$.
Démontrer que si f est négative sur $[a, b]$ (c'est-à-dire que $f(x) \leqslant 0$ pour tout x de $[a, b]$), la fonction F précédente est décroissante sur $[a, b]$.

5.2 Soit une fonction f intégrable sur $[a, b]$. Démontrer que la fonction

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

définie sur $[a, b]$, est continue sur $[a, b]$.
(On montrera que, quel que soit $\alpha > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout x réel, on ait :

$$|x - x_0| < \beta \Longrightarrow |F(x) - F(x_0)| < \alpha).$$

5.3 1° Soit φ une fonction en escalier définie sur $[0, a]$ $(a > 0)$. Démontrer que la fonction :

$$x \longmapsto \varphi(-x)$$

définie sur $[-a, 0]$ est aussi une fonction en escalier et que

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx = \int_{-a}^0 \varphi(-x)\,dx.$$

2° En déduire que si f est une fonction intégrable sur $[0, a]$, la fonction :

$$x \longmapsto f(-x)$$

définie sur $[-a, 0]$ est intégrable sur $[-a, 0]$ et

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(-x)\,dx.$$

3° Démontrer que si f est *paire* et intégrable sur $[-a, a]$, on a

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

4° Démontrer que si f est *impaire* et intégrable sur $[-a, a]$ on a

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

Applications : calculer $\int_{-1}^1 x^5\sqrt{x^4+1}\,dx$, $\quad \int_{-1}^1 x\sin^2 x\,dx$.

5.4 1° Soit φ une fonction en escalier définie sur $[a, b]$. Démontrer que, pour tout h réel donné, la fonction : $x \longmapsto \varphi(x+h)$ définie sur $[a-h, b-h]$ est aussi une fonction en escalier et que

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_{a-h}^{b-h} \varphi(x+h)\,dx.$$

2° En déduire que si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$, la fonction : $x \longmapsto f(x+h)$ est intégrable sur $[a-h, b-h]$ et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-h}^{b-h} f(x+h)\,dx.$$

3° Soit f une fonction *périodique*, de période P, intégrable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que l'intégrale :

$$\int_\alpha^{\alpha+P} f(x)\,dx$$

a une valeur indépendante du nombre réel α.
Application : calculer $\int_0^{2\pi} \sin^5 x\,dx$
(la fonction : $x \longmapsto \sin^5 x$ est impaire, on utilisera aussi le résultat de la 4° question de l'exercice précédent).

5.5 Soit la fonction $F : x \longmapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$ et $F''(x)$ si ces nombres existent.

5.6 1° Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, α une fonction dérivable sur un intervalle I, $\alpha(I) \subset [a, b]$. Démontrer que la fonction $F : t \longmapsto \int_a^{\alpha(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur I et que l'on a pour tout x de I :

$$F'(x) = f[\alpha(x)] \times \alpha'(x).$$

2° Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, α et β deux fonctions dérivables sur I, $\alpha(I)$ et $\beta(I)$ étant inclus dans $[a, b]$. Démontrer que la fonction $F : x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$ est dérivable sur I et que l'on a pour tout x de I :

$$F'(x) = f[\beta(x)] \times \beta'(x) - f[\alpha(x)] \times \alpha'(x).$$

3° Application. Soit $F : x \longmapsto \int_{x+1}^{x^2+2} \sqrt{1+t^2}\,dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$ si cette dérivée existe.

5.7 Trouver la moyenne de la fonction : $t \longmapsto a\sin\omega t$ $(a > 0, \omega > 0$ donnés) sur $\left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$; sur $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$.

5.8 Trouver la moyenne de la fonction : $x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $[0, 1]$.

5.9 Soit $S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^3\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$, la moyenne arithmétique des n nombres $\left(\frac{1}{n}\right)^3, \left(\frac{2}{n}\right)^3, \dots \left(\frac{n}{n}\right)^3$. Soit $S'_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^3\right]$ la moyenne arithmétique des n nombres $0, \left(\frac{1}{n}\right)^3, \left(\frac{2}{n}\right)^3, \dots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^3$. Montrer que S_n et S'_n sont les intégrales de deux fonctions en escalier majorant et minorant la fonction $f : x \longmapsto x^3$ sur $[0, 1]$. En déduire la limite de S_n et de S'_n quand $n \to +\infty$.

5.10 Calculer de même $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

Primitives déduites des primitives usuelles.

Calculer, quand elles existent, les primitives des fonctions définies par (ex. 11 *à* 32) :

5.11 $f(x) = (x+1)^2(x-3)$.

5.12 $f(x) = (x^4 + 4x^3 + x^2 - 1)^5(2x^3 + 6x^2 + 1)$.

5.13 $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{(x^4 + 4x + 1)^2}$.

5.14 $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{5 + x^3}}$.

5.15 $f(x) = \sqrt{2x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$.

5.16 $f(x) = x^2 + x - 1 + \dfrac{1}{x^3}$.

5.17 $f(x) = \dfrac{x^4 + 5x^2 - 1}{x^2}$.

5.18 $f(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

5.19 $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{(x^2-1)^3}$ $\left(\text{on mettra } f(x) \text{ sous la forme } \dfrac{A}{(x-1)^3} + \dfrac{B}{(x+1)^3}\right)$.

5.20 $f(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^4}$ (on écrira $x + 2$ sous la forme $x + 1 + 1$).

5.21 $f(x) = \dfrac{(x + \sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}$, $g(x) = \dfrac{1}{(x + \sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$

(On calculera d'abord la dérivée de $x \longmapsto x + \sqrt{x^2+1}$).

5.22 $f(x) = \cos x \cos 3x \cos 5x$.

5.23 $f(x) = \cos^2 x$.

5.24 $f(x) = \cos^3 x$.

5.25 $f(x) = \sin^4 x$.

5.26 $f(x) = \cos^3 x \sin x$.

5.27 $f(x) = \cos^4 x \sin^2 x$.

5.28 $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x}$.

5.29 $f(x) = \dfrac{1}{1 - \cos x}$.

5.30 $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin x}$ $\left(\text{on écrira } f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}\right)$.

5.31 $f(x) = \dfrac{\text{tg}^2\, x - 2\,\text{tg}\, x + 5}{\cos^2 x}$.

5.32 $f(x) = \text{tg}^2 x$.

5.33 Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x} \quad \text{si } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2},$$
$$f_n(0) = n.$$

1° Montrer que f_n est continue donc intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Soit I_n cette intégrale.

2° Calculer $I_n - I_{n-2}$ (on distinguera deux cas suivant que n est pair ou impair).

3° En déduire I_n.

Intégration par parties.

5.34 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx$.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$.

Plus généralement soit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\, dx$$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x\, dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

trouver des relations de récurrence entre ces intégrales.

5.35 Calculer $\displaystyle\int_a^x (t^2 + t + 1) \sin t\, dt$ (a et x réels quelconques).

5.36 Calculer $I = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{\sin^4 t}\, dt$.

[On suppose la fonction : $t \longmapsto \dfrac{1}{\sin^4 t}$ continue sur $[a, x]$ et on écrira $I = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{\sin^2 t} \frac{1}{\sin^2 t}\, dt$; on fera une intégration par parties]

5.37 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$ $\quad (n \in \mathbb{N})$.

1° Par une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}.

2° Calculer I_0.

3° Calculer I_n.

5.38 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$ $\quad (n \in \mathbb{N})$.

1° Par une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} (cf. § 5.7 b, exercice 15).

2° En déduire I_{2p} et I_{2p+1} $\quad (p \in \mathbb{N})$.

3° Montrer que

$$\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leqslant \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leqslant 1.$$

En déduire

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{(2.4.6 \ldots .\, 2p)^2}{[1.3.5 \ldots .\,(2p-1)]^2\,(2p+1)}.$$

Extensions de la notion d'intégrale.

5.39 Calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(t^2-1)^2}\, dt$, $\quad (x > 0)$.

En déduire $l = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$. On écrira alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2-1)^2}\, dt = l$.

5.40 Calculer $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, dt, \quad (0 < x < 1).$

En déduire $l = \lim_{x \to 1-0} F(x)$. On écrira alors $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = l.$

5.41 Calculer $F(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \quad (-1 < x < 1).$

En déduire $l = \lim_{x \to 1-0} F(x)$ et $l' = \lim_{x \to -1+0} F(x)$. On écrira alors $\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = l - l'.$

Calcul d'aires.

On suppose le plan (affine euclidien) rapporté à un repère orthonormé (ex. 42 *à* 46).

5.42 Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux paraboles d'équations :

$$y = x^2 - 3x + 3, \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}.$$

5.43 1° Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : x \longmapsto x + 1 + \frac{4}{(x-2)^2}$$

2° Calculer l'aire algébrique $\mathcal{A}(\lambda)$ de l'ensemble des points M (x, y) tels que :

$$\begin{cases} x \in [3, \lambda] & (\lambda > 2) \\ x + 1 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

lorsque x varie de 3 à λ.

Calculer $\lim_{\lambda \to 2+0} \mathcal{A}(\lambda)$, $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

5.44 1° Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : x \longmapsto 3x^2 + \frac{2}{x^3}.$$

Placer la courbe représentant f par rapport à la parabole représentant la fonction: $x \longmapsto 3x^2$.

2° Calculer l'aire algébrique $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan définie par

$$\begin{cases} x \in [1, \lambda] & (\lambda > 0) \\ 3x^2 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

lorsque x varie de 1 à λ.

Soit $|\mathcal{A}(\lambda)|$ l'aire géométrique, étudier et représenter graphiquement la fonction :

$\lambda \longmapsto |\mathcal{A}(\lambda)|$ lorsque λ varie de 0 à $+\infty$.

Discuter, suivant les valeurs du paramètre $m > 0$, le nombre de racines λ réelles de l'équation

$$|\mathcal{A}(\lambda)| < m.$$

Quand cette équation admet deux racines positives, trouver la relation indépendante de m qu'elles vérifient.

5.45 Construire la courbe d'équation

$$a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$$

(on étudiera les éléments de symétrie et on calculera y en fonction de x).

Calculer l'aire de la partie du plan limitée par cette courbe.

5.46 Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \pi - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \quad \text{pour} \quad x \in [0, 4\pi],$$
$$f(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x > 4\pi.$$

1° Montrer que cette fonction est dérivable quel que soit x positif. Quelle est sa fonction dérivée ? Tracer la courbe Γ représentant cette fonction dans un repère orthonormé d'axes Ox et Oy. α étant un nombre réel de l'intervalle $[0, \pi]$, calculer

$$f(2\pi - \alpha) + f(2\pi + \alpha).$$

Quel renseignement cela fournit-il pour la construction de Γ ?

2° Considérant la courbe Γ comme le profil d'une montagne où se dérouleront d'éventuels Jeux Olympiques, on construit un tremplin joignant le point D $(0, +5)$ au point A $(+3, +3)$ par un arc de parabole d'axe parallèle à Oy et tel que le coefficient directeur de la tangente en A soit $-0{,}4$. Montrer que le profil du tremplin est défini par

$$\begin{cases} 45y = 4x^2 - 42x + 225 \\ 0 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

3° On se propose de montrer que le tremplin ne perce pas la montagne. Dans ce but :

a) Déterminer l'équation de la tangente T au profil de la montagne au point d'abscisse π. Situer le point A $(+3, +3)$ par rapport à cette tangente.

b) Par le point A on mène la droite T' parallèle à T. Déterminer la position du tremplin par rapport à T'.

4° Calculer l'aire de la surface comprise entre le tremplin et le profil de la montagne, d'une part, et entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$, d'autre part.

On donne $\cos\frac{3}{2} = +0{,}1$ et $\pi = 3{,}14$.

(Bacc. D, Grenoble, juin 1969.)

Autres applications du calcul intégral.

Le plan ou l'espace (affines euclidiens) seront toujours rapportés à des repères orthonormés (ex. 47 à 54).

5.47 Calculer le volume de la partie de l'espace définie par :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ z \geqslant 0 \\ x + y + z \leqslant 1. \end{cases}$$

5.48 Calculer le volume de la partie de l'espace définie par :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 \leqslant y \leqslant x + 1 \\ 0 \leqslant z \leqslant 3 \end{cases}$$

5.49 L'espace étant rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, Oz, soit l'ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$ donnés) dans le plan (xOy). Calculer le volume de la partie D engendrée par la révolution autour de Ox de l'ensemble des points du plan (xOy) défini par

$$\begin{cases} -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

Cas particulier où $a = b$.

Calculer le moment d'inertie, par rapport au plan (yOz), de la partie D supposée homogène et de masse M donnée.

5.50 L'espace étant rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, Oz, calculer le volume de la partie D engendrée par la révolution autour de Oy de l'ensemble des points du plan (xOy) défini par (en supposant $a > 0$ donné) :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a \\ \sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{a}. \end{cases}$$

Calculer le moment d'inertie, par rapport au plan (xOz), de la partie D supposée homogène et de masse M donnée.

5.51 Soit un triangle ABC rectangle en A, les côtés ayant pour ongueurs a, b, c. On suppose que ce triangle représente une plaque homogène de masse M. Calculer les moments d'inertie de cette plaque par rapport aux droites (AB), (AC), (BC).

5.52 Soit Δ une droite quelconque du plan (ou de l'espace) et Δ_0 la parallèle à Δ passant par le centre de gravité G d'un corps (si le corps est formé de n points P_i de masse m_i, son centre de gravité ou centre d'inertie G est le point tel que $\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}$). On désigne par a la distance des droites Δ et Δ_0, par M la masse du corps, I_Δ et I_{Δ_0} les moments d'inertie du corps par rapport à Δ et à Δ_0. Démontrer que l'on a

$$I_\Delta = I_{\Delta_0} + Ma^2$$

(théorème de Huygens). On aura des théorèmes analogues pour les moments d'inertie par rapport à un point ou un plan.

Application. Calculer le moment d'inertie d'un disque homogène par rapport à une tangente (on utilisera le résultat de l'exercice 5 du § 5.10 b).

5.53 Soit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. L'ensemble des points du plan limité par cette ellipse représente une plaque dont la masse spécifique superficielle μ en un point P quelconque est proportionnelle à la distance de P à l'axe Oy :

$$\mu = k\,|\,x\,| \qquad (k \text{ constante positive donnée}).$$

Calculer la masse de cette plaque.

5.54 Au cours de la traction d'une tige métallique, la force F est proportionnelle à l'allongement x :

$$F = kx \qquad (k \text{ constante positive donnée}).$$

Calculer le travail total W, lorsque l'allongement varie progressivement de 0 à x_1.

Sujet d'étude.

5.55 1° Soit une fonction f continue sur $[a, b]$ $(a < b)$ et positive sur ce segment (c'est-à-dire que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[a, b]$). On sait que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ (cf. § 5.4 a). Démontrer que si $f(x) > 0$ en un point au moins de $[a, b]$, on a $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

2° Démontrer que, pour toute fonction f continue et positive sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Longleftrightarrow (f \text{ est la fonction nulle sur } [a, b]).$$

3° Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et λ un nombre réel quelconque. Mettre l'intégrale

$$\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2\,dx$$

sous la forme d'un polynôme en λ, ordonné suivant les puissances décroissantes.

En déduire l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right] \times \left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]$$

4° Montrer que l'application n de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+$,

$$n : f \longmapsto n(f) = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

est une *norme*.

6| Fonctions logarithmiques et exponentielles. Applications.

La première section de ce dernier chapitre d'analyse est consacré à l'étude des **fonctions logarithmiques** *qui sont des isomorphismes de* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *sur* $(\mathbb{R}, +)$ *et à l'étude des* **fonctions exponentielles** *qui sont des isomorphismes de* $(\mathbb{R}, +)$ *sur* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Dans la section II, nous donnons quelques notions sur les **équations différentielles** *et leurs applications en Physique et dans d'autres domaines.*

Nous indiquons enfin l'utilisation de la **règle à calcul** *et de la* **table de logarithmes** *ainsi que quelques exemples de calcul numérique. Le principe de la règle à calcul et celui de la table de logarithmes sont fondés essentiellement sur l'isomorphisme de* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *sur* $(\mathbb{R}, +)$ *qu'est la fonction logarithme de base 10.*

I. Fonctions logarithmiques et exponentielles

6. 1. ÉTUDE D'UN ENSEMBLE DE FONCTIONS

a) Problème.

Rappelons que si l'on a un ensemble E muni d'une loi interne $\top$ et un ensemble E′ muni d'une loi interne $\top'$, on appelle **homomorphisme** f de (E, $\top$) dans (E′, $\top'$) toute application f de E dans E′ telle que

$$(\forall\,(x_1, x_2) \in E \times E) \qquad f(x_1 \top x_2) = f(x_1) \top' f(x_2).$$

Cherchons toutes les fonctions numériques f définies sur $]0, +\infty[$ telles que :

1. Pour tout $x_1 > 0$ et tout $x_2 > 0$.

$$(1) \qquad f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Une telle fonction est donc un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

2. La fonction f soit *dérivable* sur $]0, +\infty[$.

Si f existe, supposons $x_1 > 0$ fixe et $x_2 = x$ variable décrivant $]0, +\infty[$.

La relation (1) s'écrit alors

$$f(x_1 x) = f(x_1) + f(x)$$

d'où par dérivation

$$x_1 f'(x_1 x) = f'(x),$$

pour $x = 1$ on a

$$x_1 f'(x_1) = f'(1)$$

$$f'(x_1) = \frac{f'(1)}{x_1}$$

et pour tout $x > 0$, on peut aussi écrire

$$f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$$

$$f'(x) = \frac{k}{x}, \quad \text{en posant } k = f'(1).$$

La fonction f est donc une primitive de la fonction : $x \longmapsto \frac{k}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Or la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc (cf. § 5.3 b) intégrable sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$ et l'on peut écrire (cf. § 5.6 b) pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \int_1^x \frac{k}{t}\, dt + C$$

(C constante réelle).
Si l'on fait $x_2 = 1$ dans la relation (1), on obtient pour tout $x_1 > 0$:

$$f(x_1) = f(x_1) + f(1)$$

d'où

$$f(1) = 0$$

par suite $C = 0$. Donc, pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \int_1^x \frac{k}{t}\, dt$$

(2)
$$f(x) = k \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Réciproquement si l'on a une fonction f définie par (2) pour tout $x > 0$, k étant une constante réelle arbitraire, on peut écrire d'après (2), pour tout $x > 0$ (cf. § 5.6 b) :

(3)
$$f'(x) = \frac{k}{x}$$

on a aussi, pour $x_1 > 0$ donné et pour tout $x > 0$, en remplaçant x par $x_1 x$ dans (3) :

$$f'(x_1 x) = \frac{k}{x_1 x}$$

d'où

(4)
$$x_1 f'(x_1 x) = \frac{k}{x}$$

il résulte de (3) et (4) que les fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(x_1 x)$ définies sur $]0, +\infty[$ ont la même dérivée pour tout $x > 0$ donc (cf. § 3.1 c) il existe un nombre réel C tel que pour tout $x > 0$ ($x_1 > 0$ est donné) :

$$f(x_1 x) = f(x) + C;$$

pour $x = 1$, on en déduit

$$f(x_1) = f(1) + C;$$

d'après (2), $f(1) = 0$ donc $C = f(x_1)$ et l'on a pour $x_1 > 0$ donné et pour tout $x > 0$:

$$f(x_1 x) = f(x_1) + f(x),$$

mais le raisonnement est vrai quel que soit le choix de $x_1 > 0$ donné, donc cette relation est encore vraie pour tout $x_1 > 0$ et tout $x > 0$ ou encore, en remplaçant x par x_2, pour tout $x_1 > 0$ et tout $x_2 > 0$, on a bien la relation (1).

Donc l'ensemble des fonctions cherchées est l'ensemble des fonctions :

$$x \longmapsto k \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

définies sur $]0, +\infty[$, k étant une constante réelle arbitraire.

Pour chaque valeur de k, nous obtenons ainsi une fonction et une seule que nous désignerons par f_k.

b) Formules.

On vient de voir que pour tout $x_1 > 0$ et tout $x_2 > 0$

(1)
$$\boxed{f_k(x_1 x_2) = f_k(x_1) + f_k(x_2)}$$

chacune des fonctions f_k est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
Plus généralement si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres réels quelconques strictement positifs, démontrons par récurrence que :

(5)
$$f_k(x_1 x_2 \ldots x_n) = f_k(x_1) + f_k(x_2) + \ldots + f_k(x_n).$$

L'égalité est vraie pour $n = 2$ d'après (1). Supposons que l'on ait :

$$f_k(x_1 x_2 \ldots x_{n-1}) = f_k(x_1) + f_k(x_2) + \ldots + f_k(x_{n-1})$$

alors

$$\begin{aligned} f_k(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n) &= f_k[(x_1 x_2 \ldots x_{n-1}) x_n] \\ &= f_k(x_1 x_2 \ldots x_{n-1}) + f_k(x_n) \\ &= [f_k(x_1) + f_k(x_2) + \ldots + f_k(x_{n-1})] + f_k(x_n) \end{aligned}$$

on a donc bien (5).
On a vu aussi que

$$\boxed{f_k(1) = 0}$$

ce qui montre que l'image par f_k de l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$.
Quel que soit $x > 0$,

$$1 = x \times \frac{1}{x}$$

$$f_k(1) = f_k(x) + f_k\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$0 = f_k + f_k\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc, quel que soit $x > 0$,

$$\boxed{f_k\left(\frac{1}{x}\right) = -f_k(x)}$$

ce qui montre que l'image par f_k de l'inverse d'un élément quelconque de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est l'opposé dans $(\mathbb{R}, +)$ de l'image de cet élément.

Quels que soient $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$,

$$\frac{x_1}{x_2} = x_1 \times \frac{1}{x_2}$$

$$f_k\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f_k(x_1) + f_k\left(\frac{1}{x_2}\right)$$

$$\boxed{f_k\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f_k(x_1) - f_k(x_2)} \ .$$

Si r est un nombre rationnel quelconque et $x > 0$ quelconque, calculons $f_k(x^r)$.
Tout d'abord, si n est un entier naturel non nul quelconque, faisons $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x > 0$ dans (5) :

$$f_k(x\,x \ldots x) = f_k(x) + f_k(x) + \ldots + f_k(x)$$

donc :

$$f_k(x^n) = nf_k(x).$$

Si n est un entier naturel non nul quelconque et $x > 0$ quelconque, on sait que :

$$x = (\sqrt[n]{x})^n$$

d'où

$$f_k(x) = nf_k(\sqrt[n]{x})$$

donc

$$f_k(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} f_k(x).$$

Si p et q sont des entiers naturels non nuls quelconques, on peut aussi écrire pour tout $x > 0$:

$$f_k\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = f_k(\sqrt[q]{x^p})$$

$$= \frac{1}{q} f_k(x^p)$$

$$= \frac{p}{q} f_k(x)$$

Donc :

$$(\forall\, r \in \mathbb{Q}_+^*) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*) \qquad f_k(x^r) = rf_k(x).$$

Si $r \in \mathbb{Q}_-^*$, posons $r' = -r$. On a pour tout $x > 0$:

$$f_k(x^r) = f_k\left(\frac{1}{x^{r'}}\right) = -f_k(x^{r'})$$

$$= -r' f_k(x)$$

$$= r f_k(x).$$

Si enfin $r = 0$, pour tout $x > 0$:

$$x^0 = 1$$

d'où

$$f_k(x^0) = f_k(1) = 0$$

on a encore

$$f_k(x^0) = 0\, f_k(x).$$

En résumé, on peut écrire :

$$(\forall\, r \in \mathbb{Q}) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \boxed{f_k(x^r) = rf_k(x)}$$

6. 2 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

a) Définition. Interprétation géométrique. Formules.

Étudions la fonction f_1 obtenue pour $k = 1$.

Définition.

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction : $x \longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ définie sur $]0, +\infty[$ c'est-à-dire la primitive de la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

Le mot « népérien » provient du nom de Neper (ou Napier), mathématicien écossais (1550-1617) à qui l'ont doit l'invention des logarithmes. On désigne la fonction logarithme népérien par le symbole Log. Pour tout $x > 0$, on peut écrire :

$$\boxed{\text{Log}\, x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt}$$

Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative Γ de la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est une hyperbole équilatère. Soit A et A' les points d'abscisse 1 respectivement sur Γ et sur $x'x$, M et M' les points d'abscisse $x > 0$ respectivement sur Γ et sur $x'x$ (fig. 1). Le nombre $\text{Log}\, x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ est l'aire algébrique de la partie du plan A'M'MA, cette aire étant strictement positive ou strictement négative suivant que $x > 1$ ou que $0 < x < 1$ (cf. § 5.8 b).

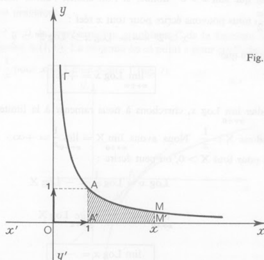


Fig. 1

Les formules précédentes s'écrivent pour tout x_1, x_2, x strictement positifs et pour tout r rationnel :

$$\text{Log}\, x_1 x_2 = \text{Log}\, x_1 + \text{Log}\, x_2$$

$$\text{Log}\, 1 = 0$$

$$\text{Log}\, \frac{1}{x} = -\,\text{Log}\, x$$

$$\text{Log}\, \frac{x_1}{x_2} = \text{Log}\, x_1 - \text{Log}\, x_2$$

$$\text{Log}\, x^r = r\, \text{Log}\, x.$$

b) Isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

La fonction logarithme népérien est dérivable donc continue sur $]0, +\infty[$, sa dérivée en tout point $x > 0$ étant $\frac{1}{x} > 0$. Donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Étudions les limites de cette fonction quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 à droite. Montrons tout d'abord que $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log}\, x = +\infty$.

Quel que soit $\alpha > 0$ donné, pour avoir

(1) $$\text{Log}\, x > \alpha,$$

cherchons un entier naturel n tel que $\text{Log}\, 2^n > \alpha$, il suffira alors de prendre $x > 2^n$ car, la fonction étant strictement croissante sur $]0, +\infty[$, nous avons :

$$\text{Log}\, x > \text{Log}\, 2^n > \alpha$$

et (1) sera vérifiée.

Pour avoir $\text{Log}\, 2^n > \alpha$, il suffit que $n\, \text{Log}\, 2 > \text{Log}\, \alpha$ ou encore, en divisant les deux nombres de cette dernière inégalité par $\text{Log}\, 2 > 0$ (car $\text{Log}\, 2 > \text{Log}\, 1 = 0$), que $n > \frac{\text{Log}\, \alpha}{\text{Log}\, 2}$.

Donc quel que soit $\alpha > 0$ donné, si l'on choisit l'entier naturel n de manière que $n > \frac{\text{Log}\, \alpha}{\text{Log}\, 2}$, nous pouvons écrire pour tout x réel :

$$x > 2^n \Longrightarrow \text{Log}\, x > \text{Log}\, 2^n > \alpha$$

ce qui montre que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \text{Log}\, x = +\infty}$$

Pour étudier $\lim\limits_{x \to +0} \text{Log}\, x$, cherchons à nous ramener à la limite précédente en posant $x = \frac{1}{X}$ donc $X = \frac{1}{x}$. Nous avons $\lim\limits_{x \to +0} X = \lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty$. Pour tout $x > 0$ et par suite pour tout $X > 0$, on peut écrire :

$$\text{Log}\, x = \text{Log}\, \frac{1}{X} = -\,\text{Log}\, X$$

d'où

$$\lim_{x \to +0} \text{Log}\, x = -\lim_{X \to +\infty} \text{Log}\, X$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \to +0} \text{Log}\, x = -\infty}$$

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on a $\lim\limits_{x \to +0} \text{Log}\, x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Log}\, x = +\infty$, donc (cf. § 1.11) cette fonction est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

D'autre part on sait (cf. § 6.1 a) qu'elle est un homomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. C'est donc un **isomorphisme** (voir tome I).

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème.

La fonction logarithme népérien est un isomorphisme du groupe multiplicatif des nombres réels strictement positifs $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur le groupe additif des nombres réels $(\mathbb{R}, +)$.

Le tableau de variation de cette fonction est :

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+	1	+	
$\text{Log}\, x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

On notera que pour tout x réel :

$$x = 1 \Longleftrightarrow \text{Log}\, x = 0$$

$$x > 1 \Longleftrightarrow \text{Log}\, x > 0$$

$$0 < x < 1 \Longleftrightarrow \text{Log}\, x < 0.$$

c) Représentation graphique.

Puisque $\text{Log}\, 1 = 0$, la représentation graphique Γ de la fonction logarithme népérien passe par le point A (1, 0). La tangente en ce point a pour coefficient directeur la valeur de la dérivée $\frac{1}{x}$ pour $x = 1$ c'est-à-dire 1 (fig. 2).

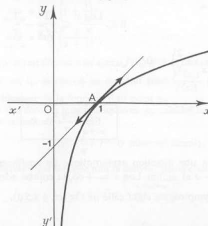


Fig. 2

On a vu que $\lim\limits_{x\to+0} \text{Log } x = -\infty$ donc $y'y$ est une asymptote à Γ. On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log } x = +\infty$, cherchons s'il y a une asymptote d'équation de la forme $y = ax + b$. On est amené à étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{Log } x}{x}$ (cf. § 3.5 c).

Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log } x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on ne peut en déduire immédiatement la limite de la fonction : $x \longmapsto \dfrac{\text{Log } x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Pour $x \geqslant 1$, on a $\dfrac{\text{Log } x}{x} \geqslant 0$, montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{Log } x}{x} = 0$ en majorant, pour $x \geqslant 1$, $\dfrac{\text{Log } x}{x}$ par la valeur $\varphi(x)$ d'une fonction φ ayant pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.

A cet effet, on sait que $\text{Log } x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.

Quel que soit $t \geqslant 1$, on a

$$\sqrt{t} \geqslant 1$$

d'où

$$(\sqrt{t})^2 \geqslant \sqrt{t}$$

$$t \geqslant \sqrt{t}$$

$$\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$$

donc (cf. § 5.4 b) quel que soit $x \geqslant 1$

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt \leqslant \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$$

c'est-à-dire

$$\text{Log } x \leqslant [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2$$

donc quel que soit $x \geqslant 1$

$$0 \leqslant \frac{\text{Log } x}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$$

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x}\right) = 0$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{Log } x}{x} = 0}$$

La courbe Γ a une direction asymptotique de coefficient directeur $a = 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} (\text{Log } x - a\,x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \text{Log } x = +\infty$, la courbe admet une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de Ox (cf. § 3.5 d).

d) Application.

Étudions $\lim\limits_{x\to+0} x \text{ Log } x$. Nous avons $\lim\limits_{x\to+0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+0} \text{Log } x = -\infty$, on ne peut en déduire immédiatement la limite de la fonction : $x \longmapsto x \text{ Log } x$ quand x tend vers 0 à droite. Cherchons à nous ramener au cas précédent en posant $x = \dfrac{1}{X}$ donc $X = \dfrac{1}{x}$. Nous avons $\lim\limits_{x\to+0} X = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Pour tout $x > 0$ et par suite pour tout $X > 0$, on peut écrire :

$$x \text{ Log } x = \frac{1}{X} \text{ Log } \frac{1}{X} = -\frac{\text{Log X}}{X}$$

d'où

$$\lim_{x\to+0} x \text{ Log } x = -\lim_{X\to+\infty} \frac{\text{Log X}}{X}$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to+0} x \text{ Log } x = 0}$$

EXERCICES

Chercher si les fonctions suivantes ont une limite et donner, s'il y a lieu, la valeur de cette limite :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{Log } x}{x^{\frac{p}{q}}}$ $(p \in \mathbb{N}^*,\ q \in \mathbb{N}^*)$.

2. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{p}{q}} \text{ Log } x$ $(p \in \mathbb{N}^*,\ q \in \mathbb{N}^*)$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\text{Log } x)^3}{x^2}$.

4. Former le taux d'accroissement de la fonction Log entre 1 et $1 + h$. En déduire $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\text{Log}(1+h)}{h}$.

   En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} x \text{ Log}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x \text{ Log}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

5. Démontrer que si f est dérivable en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, la fonction : $x \longmapsto \text{Log}\,|f(x)|$ est dérivable en x_0, sa dérivée en ce point étant $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$. Ce nombre s'appelle la **dérivée logarithmique** de la fonction f au point x_0.

   Si f et g ont des dérivées logarithmiques en x_0, calculer les dérivées logarithmiques en x_0, si elles existent, de :

$$fg,\quad \frac{f}{g},\quad f^r \quad (r \text{ rationnel donné}).$$

   Calculer la dérivée logarithmique puis la dérivée, quand elles existent, de la fonction

$$x \longmapsto x\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x^2+1)^3}.$$

6. Si f est dérivable et ne s'annule pas sur un intervalle I, une primitive quelconque, sur I, de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ est la fonction $G : x \longmapsto \text{Log}\,|f(x)| + C$, C étant une constante réelle arbitraire.
Application. Chercher les primitives, en précisant les ensembles de définition, des fonctions g telles que :

$$g(x) = \frac{1}{x-1}, \quad g(x) = \frac{x^3 + x}{x^4 + 2x^2 + 3},$$

$$g(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{(x-1)^2} \left[\text{qu'on écrira sous la forme } ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}\right].$$

$$g(x) = \text{tg}\, x, \quad g(x) = \text{cotg}\, x.$$

6. 3. FONCTION LOGARITHME DE BASE a

a) Définitions. Formules.

Étudions maintenant les fonctions de la forme (cf. § 6.1 a)

$$f_k : x \longmapsto k \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = k \text{ Log } x$$

(k constante réelle arbitraire).
Si l'on se donne f_k donc k, cherchons dans $\mathbb{R}_+^*$ les solutions de l'équation :

(1) $$f_k(x) = 1.$$

Pour tout $x > 0$,

$$(1) \iff k \text{ Log } x = 1$$

si $k = 0$, (1) est impossible

si $k \neq 0$, $(1) \iff \text{Log } x = \dfrac{1}{k}$

Cette dernière équation admet une solution unique dans $\mathbb{R}_+^*$, puisque la fonction : $x \longmapsto \text{Log } x$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$ et, puisque $\dfrac{1}{k} \neq 0$, cette solution est différente de 1.
Inversement si l'on se donne un nombre a strictement positif et différent de 1, soit $k = \dfrac{1}{\text{Log } a}$, il existe une fonction et une seule définie sur $]0, +\infty[$

$$f_k : x \longmapsto k \text{ Log } x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$$

et telle que $f_k(a) = 1$. On notera que $k = \dfrac{1}{\text{Log } a} \neq 0$.

Conclusion : au lieu de définir une fonction f_k par la donnée du nombre réel k, on peut la définir par la donnée du nombre réel a, strictement positif et différent de 1, d'image 1 par f_k. Seule la fonction f_0 correspondant à $k = 0$ n'est pas obtenue ainsi. La fonction f_0 est la fonction nulle : $x \longmapsto 0$ définie sur $]0, +\infty[$, nous exclurons ce cas.

Définition.
Étant donné un nombre réel a strictement positif et différent de 1, on appelle **fonction logarithme de base** a la fonction : $x \longmapsto \dfrac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$ définie sur $]0, +\infty[$.

On la désigne par le symbole $\log_a$. Pour tout $x > 0$, on a

$$\boxed{\log_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}}$$

le nombre $\log_a x$ se lit « logarithme de base a de x » et on notera que

$$\boxed{\log_a a = 1},$$

dans la base considérée le logarithme de la base est toujours égal à 1.
En particulier, la base de la fonction logarithme népérien est le nombre que l'on désigne par e tel que $\text{Log } e = 1$.
Rappelons que la fonction logarithme népérien est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$ donc ce nombre e existe et il est unique.

Définition.
Le nombre e est le nombre réel tel que $\text{Log } e = 1$.

Puisque $\text{Log } e > 0$, on a $e > 1$ (cf. § 6.2 b). On démontre qu'une valeur approchée, à 10^{-5} près par défaut, de e est 2,718 28.
Un autre cas particulier important est celui correspondant à la base $a = 10$.
La fonction obtenue s'appelle la **fonction logarithme de base 10** que l'on représente simplement par log. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\boxed{\log x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } 10} = \text{M Log } x},$$

en posant $\text{M} = \dfrac{1}{\text{Log } 10}$. La valeur approchée de M à 5.10^{-6} près est 0,434 29. Le nombre $\log x$ s'appelle le **logarithme décimal** de x. Il existe des tables donnant des logarithmes décimaux, elles sont utilisées dans les calculs numériques. Nous en verrons l'usage plus loin.
Avec ces nouvelles notations, les formules données au § 6.1 b) deviennent dans une base quelconque a strictement positive et différente de 1, pour tout x_1, x_2, x strictement positifs et pour tout r rationnel :

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$
$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$$
$$\log_a x^r = r \log_a x.$$

EXERCICES

1. Les nombres a et b étant strictement positifs et différents de 1, démontrer que pour tout $x > 0$:
$$\log_a x = \log_a b \times \log_b x.$$

2. Démontrer que, quels que soient $a, b, c, d, \ldots\ l$ strictement positifs et différents de 1, on a
$$\log_a b \times \log_b c \times \log_c d \times \ldots \times \log_l a = 1.$$

3. Comparer

$$\log_a x \quad \text{et} \quad \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{x}.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\log (2x - 5) + \log (3x + 7) = 4 \log 2.$$

5. Simplifier

$$\frac{\log_2 16 \times \log_3 \sqrt{27}}{\log_2 8}.$$

b) Étude de la fonction logarithme de base *a*.

On sait que la fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc la fonction

$$\log_a : \quad x \longmapsto \log_a x = k \operatorname{Log} x = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}$$

est continue sur $]0, +\infty[$ comme étant le produit d'une fonction continue par une constante et elle est (cf. § 3.1 b) strictement croissante ou strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ suivant que $\operatorname{Log} a > 0$ ou $\operatorname{Log} a < 0$ c'est-à-dire suivant que $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

Pour $a > 1$, $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = \dfrac{1}{\operatorname{Log} a} \lim\limits_{x \to +0} \operatorname{Log} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = \dfrac{1}{\operatorname{Log} a} \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Log} x = +\infty.$

Pour $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$

d'où le tableau de variation :

$a > 1$

x		1	a	$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

$0 < a < 1$

x	0	a	1	$+\infty$
$\log_a x$	$+\infty$ ↘	1 ↘	0 ↘	$-\infty$

Il en résulte (cf. § 1.11) que la fonction $\log_a$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$. Comme on a pour tout $x_1 > 0$ et tout $x_2 > 0$:

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

la fonction $\log_a$ est encore (cf. § 6.2 b), comme la fonction logarithme népérien, un **isomorphisme** de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

La dérivée de la fonction $\log_a$: $x \longmapsto \log_a x = \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}$ en tout point $x > 0$ est

$$(\log_a x)' = \frac{(\operatorname{Log} x)'}{\operatorname{Log} a} = \frac{1}{x \operatorname{Log} a}.$$

Donc que que soit a donné strictement positif et différent de 1 et en tout point x réel > 0

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \operatorname{Log} a}}$$

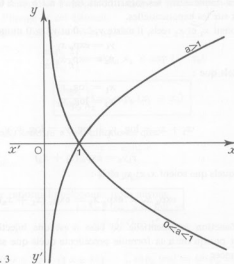


Fig. 3

La représentation graphique Γ_a de la fonction $\log_a$ est indiquée à la figure 3.

EXERCICE

6. Quelle est la transformation qui associe à Γ_a la courbe $\Gamma_{a'}$? (considérer les points de Γ_a et $\Gamma_{a'}$ de même abscisse).
Cas particulier des courbes Γ_a et $\Gamma_{\frac{1}{a}}$.

6. 4. FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE *a*

a) Définition. Formules.

Si $a > 1$, on a vu que la fonction $\log_a$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ donc (cf. § 1.11) elle est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$ et elle admet une fonction réciproque qui est une bijection continue et strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
Si $0 < a < 1$, la fonction $\log_a$ est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, $\lim\limits_{x \to +0} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ donc elle est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$ et elle admet une fonction réciproque qui est une bijection continue et strictement décroissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

Définition.

Étant donné un nombre réel *a* strictement positif et différent de 1, on appelle **fonction exponentielle de base** *a* la fonction réciproque de la fonction logarithme de base *a*.

Nous désignerons la fonction exponentielle de base a par le symbole $\exp_a$. On a donc :

(1) $$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (\forall y \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \boxed{y = \exp_a x \iff x = \log_a y}\,.$$

le nombre $\exp_a x$ se lit « exponentielle de base a de x ».

Des formules données sur les logarithmes (cf. § 6.1 b et § 6.2 a) nous allons déduire des formules sur les exponentielles.

Quels que soient x_1 et x_2 réels, il existe $y_1 > 0$ et $y_2 > 0$ uniques tels que :

$$y_1 = \exp_a x_1$$
$$y_2 = \exp_a x_2$$

c'est-à-dire tels que :

$$x_1 = \log_a y_1$$
$$x_2 = \log_a y_2$$

or

$$x_1 + x_2 = \log_a y_1 + \log_a y_2 = \log_a y_1 y_2$$

donc

$$y_1 y_2 = \exp_a (x_1 + x_2)$$

c'est-à-dire, quels que soient x_1 et x_2 réels :

$$\boxed{\exp_a x_1 \times \exp_a x_2 = \exp_a (x_1 + x_2)}\,.$$

Puisque la fonction exponentielle de base a est une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et puisqu'on a la formule précédente quels que soient x_1 et x_2 réels, nous pouvons énoncer :

Théorème.

La fonction exponentielle de base a est un isomorphisme du groupe additif des nombres réels $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif des nombres réels strictement positifs $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Plus généralement on démontrera de la même façon que quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réels :

$$\exp_a x_1 \times \exp_a x_2 \times \ldots \times \exp_a x_n = \exp_a (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Il résulte de l'équivalence (1) que puisque $\log_a a = 1$, on a donc

$$\boxed{\exp_a 1 = a}$$

et puisque $\log_a 1 = 0$, on a donc

$$\boxed{\exp_a 0 = 1}$$

ce qui montre que l'image par cet isomorphisme de l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Quel que soit x réel, il existe $y > 0$ unique tel que

$$y = \exp_a x$$

c'est-à-dire tel que

$$x = \log_a y$$

or

$$-x = -\log_a y = \log_a \frac{1}{y}$$

donc

$$\exp_a (-x) = \frac{1}{y}$$

c'est-à-dire, quel que soit x réel :

$$\boxed{\exp_a (-x) = \frac{1}{\exp_a x}}$$

ce qui montre que l'image de l'opposé d'un élément quelconque de $(\mathbb{R}, +)$ est l'inverse dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ de l'image de cet élément.

Il en résulte que, quels que soient x_1 et x_2 réels,

$$\frac{\exp_a x_1}{\exp_a x_2} = \exp_a x_1 \times \exp (-x_2)$$

$$\boxed{\frac{\exp_a x_1}{\exp_a x_2} = \exp_a (x_1 - x_2)}\,.$$

Quel que soit x réel, il existe $y > 0$ unique tel que

$$y = \exp_a x$$

c'est-à-dire tel que

$$x = \log_a y,$$

si r est un nombre rationnel quelconque nous aurons

$$rx = r \log_a y = \log_a y^r$$

donc

$$\exp_a (rx) = y^r$$

c'est-à-dire

$$(\forall r \in \mathbb{Q}) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \qquad \boxed{\exp_a (rx) = (\exp_a x)^r}\,.$$

b) Nouvelles notations. Conséquences.

1. Pour $x = 1$, cette dernière formule s'écrit, quel que soit r rationnel :

$$\exp_a r = (\exp_a 1)^r$$

on a vu que $\exp_a 1 = a$ donc, quel que soit r rationnel :

$$\exp_a r = a^r.$$

Nous sommes alors amenés à poser, *par convention*, pour tout a strictement positif et différent de 1 et pour tout x réel :

$$\boxed{\exp_a x = a^x}\,.$$

Les formules précédentes s'écrivent alors pour tout nombre a strictement positif et différent de 1, pour tout x_1, x_2, x réels, pour tout r rationnel :

$$a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

$$a^1 = a, \qquad a^0 = 1$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \qquad \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$$

$$(a^x)^r = a^{rx}$$

REMARQUE

1. Pour tout r rationnel, on sait que $1^r = 1$ donc, par convention, pour tout x réel on écrira $$1^x = 1$$ et les formules précédentes sont encore vraies pour $a = 1$.

2. Les formules que l'on vient de trouver sont les mêmes que celles relatives aux puissances d'exposants entiers ou rationnels. Cherchons encore de nouvelles extensions de ces formules.

On sait que, pour tout a strictement positif et différent de 1, pour tout x réel et pour tout $y > 0$:

$$y = \exp_a x \iff x = \log_a y$$
$$\iff x = \frac{\operatorname{Log} y}{\operatorname{Log} a}$$
$$\iff \operatorname{Log} y = x \operatorname{Log} a$$

donc en remplaçant y par $\exp_a x = a^x$, on a pour tout a strictement positif et différent de 1 et pour tout x réel (et non plus seulement rationnel) :

(2) $$\boxed{\operatorname{Log} a^x = x \operatorname{Log} a}$$

ou encore

(3) $$\boxed{a^x = e^{x \operatorname{Log} a}}.$$

REMARQUES

2. Ces deux formules sont encore vraies pour $a = 1$ puisque $1^x = 1$ pour tout x réel (cf. remarque 1 précédente).
3. Soit la fonction logarithme de base a, pour tout $x > 0$ et tout α *réel* on peut écrire :

$$\log_a x^\alpha = \frac{\operatorname{Log} x^\alpha}{\operatorname{Log} a} = \alpha \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a} \quad \text{d'après (2),}$$

donc pour tout $x > 0$ et tout α réel (et non plus seulement rationnel) :

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

On démontre alors les formules sur les puissances, quels que soient $a > 0$, $b > 0$, x_1, x_2, x réels :

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$$
$$(ab)^x = a^x b^x$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x},$$

on montrera, pour cela, que les logarithmes népériens des deux membres de chacune de ces égalités sont égaux.

EXERCICES

Simplifier les expressions suivantes :

1. $e^{5 \operatorname{Log} 3}$.
2. $e^{-3 \operatorname{Log} 2}$.
3. $e^{2 \operatorname{Log} 3} \operatorname{Log} \sqrt[3]{e}$.
4. $\log_a [\log_a a^{(a^x)}]$.

c) Étude de la fonction exponentielle de base a.

Supposons $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction $\log_a$ étant continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$, on a vu (cf. § 6.5 a) qu'elle admet une fonction réciproque qui est la fonction exponentielle de base a continue et strictement monotone sur $]-\infty, +\infty[$.

Du tableau de variation de la fonction $\log_a$, on peut déduire celui de la fonction $\exp_a$ (cf. § 1.11) :

si $a > 1$

x	0			1		a		$+\infty$
$\log_a x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$	

d'où

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	0	↗	1	↗	a	↗	$+\infty$

si $0 < a < 1$

x	0			a		1		$+\infty$
$\log_a x$	‖ $+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$	

d'où

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
a^x	$+\infty$	↘	1	↘	a	↘	0

Pour tout x réel et tout $y > 0$:

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$
$$\iff x = \frac{\operatorname{Log} y}{\operatorname{Log} a}$$

la dérivée de la fonction : $y \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log} y}{\operatorname{Log} a}$ au point $y > 0$ est $\dfrac{1}{y \operatorname{Log} a}$ (cf. § 6.4 b) donc la dérivée de la fonction réciproque : $x \longmapsto a^x$ au point correspondant est $\dfrac{1}{\dfrac{1}{y \operatorname{Log} a}} = y \operatorname{Log} a = a^x \operatorname{Log} a.$

Remarquons que si $a = 1$ la dérivée de $x \longmapsto 1^x = 1$ au point x réel quelconque est aussi $0 = 1^x \operatorname{Log} 1$. Donc quels que soient $a > 0$ *donné* et x *variable* réelle :

$$\boxed{(a^x)' = a^x \operatorname{Log} a}.$$

En particulier si $a = e$, la fonction exponentielle de base e s'appelle simplement **» la fonction exponentielle »** sans précision de la base (évidemment on précisera la base s'il peut y avoir ambiguïté).

Sa dérivée en tout point x réel est

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

donc **la fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée.**

Dans un *même repère orthonormé*, la représentation graphique C_a de la fonction $\exp_a$ se déduit (cf. § 1 1.7 d) de celle de sa fonction réciproque $\log_a$ par symétrie par rapport à la première bissectrice du repère (fig. 4).

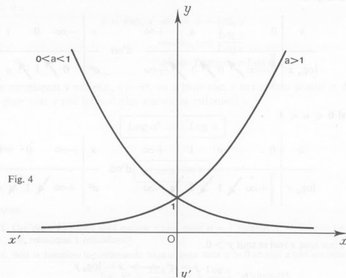


Fig. 4

EXERCICE

5. Quelle est la transformation qui associe à C_a la courbe C_a'? (considérer les points de C_a et C_a, de même ordonnée). Cas particulier des courbes C_a et $C_{\frac{1}{a}}$.

Puisque la représentation graphique de la fonction logarithme népérien admet une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de Ox (cf. § 6.2 c), en raison de la symétrie par rapport à la première bissectrice du repère la représentation graphique de la fonction exponentielle admet une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de Oy.

Donnons une démonstration plus rigoureuse de ce résultat.

Étudions $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}\cdot$ Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, on ne peut en déduire immédiatement la limite de la fonction : $x \longmapsto \frac{e^x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Cherchons à nous ramener à une fonction connue en posant $x = \text{Log X}$ donc $X = e^x$. Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Pour tout x réel et par suite pour tout $X > 0$, on peut écrire :

$$\frac{e^x}{x} = \frac{X}{\text{Log X}}$$

on sait (cf. § 6.2. c) que $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\text{Log X}}{X} = 0$, d'autre part pour $X > 1$ on a $\frac{\text{Log X}}{X} > 0$

donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{\text{Log X}} = +\infty$.

D'où $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{\text{Log X}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$$

ce qui montre que la courbe représentant la fonction exponentielle a bien une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de Oy.

Nous allons en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x$. Nous avons $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, on ne peut en déduire immédiatement la limite de : $x \longmapsto xe^x$ quand x tend vers $-\infty$. Cherchons à nous ramener au cas précédent en posant $x = -X$. Nous avons $\lim\limits_{x \to -\infty} X = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$. Pour tout x réel et tout X réel :

$$xe^x = -Xe^{-X} = -\frac{X}{e^X}$$

d'où

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = -\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X}$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0}.$$

EXERCICES

Chercher si les fonctions suivantes ont une limite et donner, s'il y a lieu, la valeur de cette limite :

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{\frac{p}{q}}}$ $\quad (p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*)$ $\left(\text{on posera } e^x = X^{\frac{p}{q}}\right)$.

7. $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^{\frac{p}{q}} e^x$ $\quad (p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*)$.

8. Former le taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et h. En déduire $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$.

   En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$.

9. Si f est dérivable sur un intervalle I, une primitive quelconque, sur I, de la fonction $g : x \longmapsto e^{f(x)} \times f'(x)$ est la fonction $G : x \longmapsto e^{f(x)} + C$, C étant une constante réelle arbitraire.

   Application. Chercher les primitives, en précisant les ensembles de définition, des fonctions g telles que :

$$g(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}, \quad g(x) = (x^3 + 1)\, e^{x^4 + 4x + 1}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}, \quad g(x) = (\sin 2x)\, e^{\cos^2 x}.$$

6. 5. NOMBRE e^{ix} ($x \in \mathbb{R}$). FONCTION COMPLEXE D'UNE VARIABLE RÉELLE

a) Définition. Formules.

Nous avons défini le symbole a^x pour a réel strictement positif et x réel et nous avons montré que les formules sur les puissances d'exposants entiers ou rationnels s'étendent aux nombres de la forme a^x (cf. § 6.5 b). On peut se demander alors si l'on peut définir un symbole tel que e^z ou a^z avec z complexe. Conformément au programme, nous nous bornerons à définir le symbole e^{ix} pour x réel.
Soit un nombre complexe quelconque de module 1. On peut l'écrire sous la forme $\cos x + i \sin x$, x étant un nombre réel quelconque. Par définition, nous poserons :

(1) $$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}.$$

La formule (1) est bien vérifiée pour $x = 0$ car $e^{i\times 0} = e^0 = 1$ et $\cos 0 + i \sin 0 = 1$.
On sait qu'il existe un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 (voir tome 1). Quels que soient x et x' réels on a :

$$(\cos x + i \sin x)(\cos x' + i \sin x') = \cos (x + x') + i \sin (x + x')$$

cette égalité peut s'écrire avec la définition (1) :

$$e^{ix}\, e^{ix'} = e^{i(x+x')};$$

quel que soit x réel, on sait que :

$$\frac{1}{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x$$

ce qui peut s'écrire d'après (1) :

$$\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix};$$

quels que soient x et x' réels :

$$\frac{\cos x + i \sin x}{\cos x' + i \sin x'} = \cos (x - x') + i \sin (x - x')$$

ce qui s'écrit d'après (1) :

$$\frac{e^{ix}}{e^{ix'}} = e^{i(x-x')}.$$

Quels que soient x réel et n entier relatif, la formule de Moivre :

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

peut s'écrire d'après (1) :

$$(e^{ix})^n = e^{inx}.$$

Tout nombre complexe écrit sous forme trigonométrique $z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ peut s'écrire sous la forme :

$$z = re^{i\alpha}$$

appelée **forme exponentielle** d'un nombre complexe. Cette forme exponentielle est commode, car nous voyons que les formules trouvées précédemment ne sont autres que les formules connues, et d'un emploi pratique, sur les puissances.

EXERCICES

1. Démontrer que l'on a, pour tout x réel, les **formules d'Euler** :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

En déduire la linéarisation de $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$

$$\left[\text{les mettre sous la forme } \sum (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right].$$

2. Simplifier :

$$\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha + \cos \beta + i \sin \beta}{1 + \cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta)}$$

(α et β réels).

b) Fonction complexe d'une variable réelle.

Une fonction complexe d'une variable réelle est une application de $\mathbb{R}$ (ou une partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$.
Si F est une application de D ($D \subset \mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$, à tout nombre x de D correspond un nombre complexe $F(x) = f(x) + ig(x)$; les fonctions : $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto g(x)$ sont des fonctions numériques définies sur D.
Réciproquement la donnée de f et g, fonctions numériques définies sur D ($D \subset \mathbb{R}$), détermine une application de D dans $\mathbb{C}$:

$$x \longmapsto F(x) = f(x) + ig(x).$$

On sait (voir tome 1) que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps des réels et qu'il est commode de le munir de la norme euclidienne qui associe à tout nombre complexe $z = a + ib$ le nombre $\sqrt{a^2 + b^2}$ qui n'est autre que le module de z. Donc toute *fonction complexe d'une variable réelle est une fonction vectorielle et tout ce qui a été dit sur la continuité, les limites, les dérivées de fonctions vectorielles s'applique aux fonctions complexes d'une variable réelle.*

Exemple.

Soit $F : x \longmapsto f(x) + ig(x)$ définie sur D ($D \subset \mathbb{R}$), les nombres $f(x)$ et $g(x)$ sont les coordonnées du vecteur $F(x)$ dans la base formée par les nombres complexes 1 et i.
La fonction F est dérivable au point x de D si et seulement si f et g sont dérivables en x (cf. § 4.6 a) et en ce point :

$$F'(x) = f'(x) + ig'(x).$$

Soit, par exemple, la fonction complexe définie sur $\mathbb{R}$

$$F : x \longmapsto e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \sin \omega x,$$

ω étant une constante réelle. En tout point x de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\omega \sin \omega x + i\omega \cos \omega x \\ &= \omega \left[\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \omega e^{i\omega x} \times e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= i\omega e^{i\omega x}. \end{aligned}$$

Donc en tout point x réel :
$$(e^{i\omega x})' = i\omega e^{i\omega x}$$
dérivée analogue à $(e^{ax})' = ae^{ax}$ lorsque a est réel donné et x variable réelle.
Si l'on pose $y = e^{i\omega x}$, on peut écrire pour tout x réel :
$$y' = i\omega e^{i\omega x}$$
$$y'' = i\omega \times i\omega \times e^{i\omega x}$$
$$y'' = -\omega^2 y.$$

II. Applications

6. 6. APPLICATION A LA RÉSOLUTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

a) Équation différentielle : $y' = ay$ (a réel donné).

On sait que la dérivée de la fonction numérique de la variable réelle : $x \longmapsto y = e^{ax}$ (a réel donné) en tout point x réel est $y' = ae^{ax}$ donc, pour tout x réel, $y' = ay$.
Plus généralement, cherchons toutes les fonctions numériques f de la variable réelle : $x \longmapsto y = f(x)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout x réel, on ait

(1) $$\boxed{y' = ay}\,.$$

Si f existe, nous dirons qu'elle est une **solution de l'équation différentielle** (1).
Nous avons trouvé une solution $f_1 : x \longmapsto e^{ax}$.
Pour toute fonction numérique f dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, on peut poser
$$y = f(x) = g(x)\, e^{ax},$$
la fonction $g : x \longmapsto g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{ax}} = f(x)\, e^{-ax}$ étant dérivable pour tout x réel puisque f et f_1 sont dérivables pour tout x réel et puisque e^{ax} n'est jamais nul.
Pour tout x réel,
$$y' = g'(x)\, e^{ax} + ag(x)\, e^{ax}$$
et pour tout x réel nous aurons
$$y' = ay \iff g'(x)\, e^{ax} + ag(x)\, e^{ax} = ag(x)\, e^{ax}$$
$$\iff g'(x) = 0$$
et nous aurons $g'(x) = 0$ pour tout x réel si et seulement s'il existe une constante réelle λ telle que $g(x) = \lambda$ pour tout x réel. L'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle (1), est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f(x) = \lambda\, e^{ax}} \quad (\lambda \text{ constante réelle arbitraire}).$$

REMARQUE

1. On vérifiera que l'ensemble des solutions, muni de l'addition des fonctions numériques d'une variable réelle et de la multiplication par un nombre réel, est une droite vectorielle (c'est-à-dire un espace vectoriel de dimension 1) sur $\mathbb{R}$.

b) Applications.

Il existe de nombreux phénomènes (physiques, chimiques, biologiques, économiques) obéissant à une **loi exponentielle** c'est-à-dire que la mesure d'un tel phénomène est une fonction d'une variable vérifiant une équation différentielle du type $y' = ay$.
Pratiquement $y' = ay$ se traduit par $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \simeq ay$ c'est-à-dire que si la variable prend des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ et la fonction les valeurs correspondantes $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$, on a :
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \simeq ay_i \text{ lorsque l'entier } i \text{ varie de 1 à } n.$$
Nous donnons quelques exemples de phénomènes obéissant à une loi exponentielle :

variable	phénomène étudié
altitude	pression atmosphérique
temps	différence des températures d'un corps et du milieu ambiant (loi du refroidissement de Newton)
temps	nombre de bactéries d'une culture
temps	nombre d'atomes de radium d'une substance radioactive qui se désintègrent naturellement
temps	valeur acquise d'un capital placé à intérêts composés.

c) Équation différentielle : $y'' = -\omega^2 y$ (ω réel donné).

On sait que la fonction complexe de la variable réelle : $x \longmapsto y = e^{i\omega x}$ (ω réel donné) a, en tout point x réel, pour dérivée : $y' = i\omega e^{i\omega x}$ et pour dérivée seconde : $y'' = i\omega \times i\omega \times e^{i\omega x} = -\omega^2 e^{i\omega x}$ donc, pour tout x réel, $y'' = -\omega^2 y$.
Plus généralement, cherchons toutes les fonctions *complexes* F de la variable réelle : $x \longmapsto y = F(x) = f(x) + ig(x)$ dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout x réel, on ait

(2) $$\boxed{y'' = -\omega^2 y}\,.$$

Si F existe, nous dirons qu'elle est une solution de l'équation différentielle (2).
On peut remarquer que $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +, .)$, ensemble des fonctions complexes définies sur $\mathbb{R}$ muni de l'additions de ces fonction et de la multiplication par un nombre complexe, est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (on montrera qu'il possède les propriétés de définition d'un espace vectoriel).
Soit S l'ensemble des fonctions complexes de la variable réelle, solutions de (2). L'ensemble S n'est pas vide car la fonction nulle : $x \longmapsto 0$ définie sur $\mathbb{R}$ est une solution.
Pour tout couple (F_1, F_2) de solutions et tout couple (λ, μ) de nombres complexes, quel que soit x réel :
$$[\lambda F_1(x) + \mu F_2(x)]'' = \lambda F_1''(x) + \mu F_2''(x)$$
$$= \lambda[-\omega^2 F_1(x)] + \mu[-\omega^2 F_2(x)]$$
$$= -\omega^2 [\lambda F_1(x) + \mu F_2(x)]$$
donc $\lambda F_1 + \mu F_2$ est une solution de (2). Par suite (voir cours de Première), on peut affirmer que $(S, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), +, .)$.

Recherche des solutions. Nous avons trouvé une solution $F_1 : x \longmapsto e^{i\omega x}$. On vérifie qu'une autre solution est $F_2 : x \longmapsto e^{-i\omega x}$, cette solution est distincte de la première si et seulement si $\omega \neq 0$. Nous supposerons, dans la suite, $\omega \neq 0$ (vous chercherez les solutions de (2) dans le cas où $\omega = 0$).

Puisque $(S, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, les fonctions complexes de la variable réelle : $x \longmapsto \lambda e^{i\omega x} + \mu e^{-i\omega x}$, λ et μ étant des constantes complexes arbitraires, sont *des* solutions de l'équation différentielle (2). On démontre que ce sont les *seules*.

En effet, procédons comme dans *a*). Pour toute fonction complexe

$$F : x \longmapsto y = F(x)$$

dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, on peut poser : $y = G(x)e^{i\omega x}$, G étant une fonction complexe dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ que nous allons déterminer. Pour tout x réel :

$$y' = e^{i\omega x}[G'(x) + i\omega\, G(x)]$$
$$y'' = e^{i\omega x}[G''(x) + 2\, i\omega\, G'(x) - \omega^2\, G(x)]$$

et nous aurons, pour tout x réel,

$$y'' = -\omega^2 y \iff G''(x) = -2\, i\omega\, G'(x).$$

Donc F est solution de (2) si et seulement si G′ est solution de l'équation différentielle :

(3) $$y_1' = 2\, i\omega y_1$$

qui est de la forme $y_1' = ay_1$ étudiée en a) mais ici $a = -2\, i\omega$ n'est plus réel. Cependant le raisonnement fait en a) est inchangé et les fonctions complexes de la variable réelle, solutions de (3), sont les fonctions : $x \longmapsto ke^{-2i\omega x}$ (k constante complexe arbitraire).

G (x) est de la forme $\alpha(x) + i\beta(x)$, les fonctions numériques α et β étant dérivables deux fois sur $\mathbb{R}$. Nous aurons $G'(x) = ke^{-2i\omega x}$ pour tout x réel si et seulement si pour tout x réel :

$$\alpha'(x) + i\beta'(x) = k(\cos 2\,\omega x - i \sin 2\,\omega x)$$

c'est-à-dire, pour tout x réel, $\begin{cases} \alpha'(x) = k \cos 2\,\omega x \\ \beta'(x) = -k \sin 2\,\omega x \end{cases}$

c'est-à-dire, pour tout x réel, $\begin{cases} \alpha(x) = \dfrac{k}{2\,\omega} \sin 2\,\omega x + C_1 \\ \beta(x) = \dfrac{k}{2\,\omega} \cos 2\,\omega x + C_2 \end{cases}$

(C_1 et C_2 constantes réelles arbitraires)

c'est-à-dire, pour tout x réel :

$$G(x) = \frac{k}{2\,\omega}(\sin 2\,\omega x + i \cos 2\,\omega x) + C_1 + iC_2$$
$$= \frac{ki}{2\,\omega}(\cos 2\,\omega x - i \sin 2\,\omega x) + C_1 + iC_2$$
$$= \frac{ki}{2\,\omega} e^{-2i\omega x} + C_1 + iC_2.$$

Donc F est solution de (2) si et seulement si, pour tout x réel :

$$F(x) = \left(\frac{ki}{2\,\omega} e^{-2i\omega x} + C_1 + iC_2\right) e^{i\omega x}$$

(4) $$\boxed{F(x) = \lambda e^{i\omega x} + \mu e^{-i\omega x}}$$

$\left(\lambda = C_1 + iC_2 \text{ et } \mu = \dfrac{ki}{2\,\omega} \text{ étant des constantes complexes arbitraires}\right)$.

Les fonctions complexes $F_1 : x \longmapsto e^{i\omega x}$ et $F_2 : x \longmapsto e^{-i\omega x}$ sont linéairement indépendantes car si $\lambda e^{i\omega x} + \mu e^{-i\omega x} = 0$ pour tout x réel, on a en particulier

$$\text{pour } x = 0, \quad \lambda + \mu = 0$$
$$\text{pour } x = 1, \quad \lambda e^{i\omega} + \mu e^{-i\omega} = 0$$

d'où

$$\lambda(e^{i\omega} - e^{-i\omega}) = 0$$
$$\lambda(e^{2i\omega} - 1) = 0$$

comme $\omega \neq 0$, on a $e^{2i\omega} \neq 1$, donc $\lambda = 0$, par suite $\mu = 0$.

Conclusion : l'ensemble des fonctions complexes de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle (2), muni de l'addition de ces fonctions et de la multiplication par un nombre complexe, est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension 2.

On trouve deux solutions simples en faisant dans (4) :

$\lambda = \mu = \dfrac{1}{2}$, on trouve la solution $F_3 : x \longmapsto \cos \omega x$

$\lambda = -\mu = \dfrac{1}{2i}$, — — $F_4 : x \longmapsto \sin \omega x$

(on vérifie, d'ailleurs, directement que F_3 et F_4 sont bien solutions de l'équation différentielle (2)). Comme ces solutions sont aussi linéairement indépendantes (si A $\cos \omega x +$ B $\sin \omega x = 0$ pour tout x réel, en particulier pour $x = 0$ on déduit $A = 0$ et pour $x = \dfrac{\pi}{2\,\omega}$ on déduit $B = 0$), elles forment une base de l'espace vectoriel des solutions. L'ensemble des fonctions *complexes* de la variable réelle, solutions de (2), est l'ensemble des fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par

(5) $$\boxed{F(x) = A \cos \omega\, x + B \sin \omega\, x}$$

(A et B constantes *complexes* arbitraires).

Cherchons toutes les solutions qui sont des fonctions *numériques* de la variable réelle. Posons $A = a + ia'$, $B = b + ib'$ (a, a', b, b' réels quelconques).

Pour tout x réel, pour toute solution F, on peut écrire F (x) sous la forme :

$$F(x) = (a + ia') \cos \omega x + (b + ib') \sin \omega x,$$

la fonction F sera une fonction numérique de la variable réelle si et seulement si pour tout x réel : $a' \cos \omega x + b' \sin \omega x = 0$ ce qui n'a lieu, comme on l'a vu, que pour $a' = b' = 0$.

Conclusion : l'ensemble des fonctions *numériques* de la variable réelle, solutions de (2), est l'ensemble des fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par (5), A et B étant des constantes *réelles* arbitraires.

REMARQUES

2. On vérifiera que cet ensemble, muni de l'addition des fonctions numériques d'une variable réelle et de la multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.

3. Lorsque A et B sont réels, on peut écrire (5) sous la forme suivante, pour tout x réel (voir cours de Première) :

$$\boxed{F(x) = K \cos(\omega x + \varphi)}$$

(ou $F(x) = K \sin(\omega\, x + \varphi)$) et toutes les fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle (2), s'obtiennent en donnant à K et à φ des valeurs constantes, réelles, arbitraires.

4. Conformément au programme et en vue de ses nombreuses applications en Physique, nous avons cherché les solutions de l'équation différentielle : $y'' = -\omega^2 y$ (ω réel donné non nul). On verra (les démonstrations sont identiques) que les solutions de l'équation différentielle : $y'' = \omega^2 y$ (ω réel donné non nul) sont les fonctions :

$$x \longmapsto \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x},$$

lorsque λ et μ sont des constantes complexes arbitraires on obtient toutes les fonctions complexes de la variable réelle solutions et lorsque λ et μ sont des constantes réelles arbitraires on obtient toutes les fonctions numériques de la variable réelle solutions.

d) Propriété caractéristique d'un phénomène vibratoire simple (ou sinusoïdal).

On a vu en classe de Première qu'un point d'abscisse x sur un axe de repère $(O, \vec{i})$ a un mouvement rectiligne vibratoire simple pendant l'intervalle de temps I si et seulement si sa loi horaire $f : t \longmapsto x = f(t)$ est définie sur I par

(6) $$\boxed{x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C}$$

(A, B, C, ω étant des constantes réelles, A et B non tous deux nuls et $\omega \neq 0$). ω s'appelle la **pulsation.**

De même, dans le plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de sens positif, le mouvement d'un point M sur un cercle de centre O est un mouvement circulaire vibratoire simple dans l'intervalle de temps I si et seulement si sa loi horaire φ : $t \longmapsto \theta = \varphi(t)$, θ étant une détermination de l'angle polaire de $\overrightarrow{OM}$, est définie encore sur I par une relation de la forme (6) (remplacer x par θ).

Plus généralement chaque fois qu'un phénomène de Physique ou de Mécanique est déterminé dans l'intervalle de temps I par la donnée d'une fonction $f : t \longmapsto x = f(t)$ définie par (6), on dit que c'est un **phénomène vibratoire simple (ou sinusoïdal).**

En posant $x - C = x_1$, on peut écrire pour tout t de I :

(7) $$x_1 = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

et on vérifie que pour tout t de I :

(8) $$\boxed{x_1'' = -\omega^2 x_1}$$ (ω réel donné non nul).

Réciproquement on vient de voir au sous-paragraphe *c)* précédent que toute solution de l'équation différentielle (8) peut être définie par (7) donc tout phénomène vibratoire simple de pulsation ω est caractérisé par la relation (8) dans un intervalle de temps.

EXERCICES

1. Trouver les fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle :

(1) $$y' = 2y.$$

Même question avec :

(2) $$y' = 2y + x$$

(on cherchera, pour cela, une fonction polynôme : $x \longmapsto y_1 = P(x)$ solution de (2) et on déduira toutes les solutions de (2) en posant $y = y_1 + Y$).

2. Trouver la solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 4y = 0$$

sachant que pour $x = \frac{\pi}{4}$, on a $y = y' = 1$.

3. Trouver les fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle :

(1) $$y'' + 9y = 0.$$

Même question avec :

(2) $$y'' + 9y = 5x + 1.$$

(On cherchera, pour cela, une fonction polynôme : $x \longmapsto y_1 = P(x)$ solution de (2) et on déduira toutes les solutions de (2) en posant $y = y_1 + Y$).

4. Trouver les fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle :

$$(x^3 + 2x - 1)\, y' = 3x + 2.$$

5. Même question avec :

$$y'' = x^4 + x^2 - 2x + 3.$$

Trouver la solution telle que, pour $x = 0$, on ait : $y = 2$ et $y' = 1$.

6. 7. UTILISATION D'UNE RÈGLE A CALCUL

On sait que la fonction logarithme de base 10 est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$. *Le principe de la règle à calcul repose essentiellement sur l'existence de cet isomorphisme.* Dans tout ce qui suit, nous supposerons les nombres donnés strictement positifs.

a) Présentation.

La règle à calcul comprend trois parties (fig. 5) :

— le corps de la règle, fixe
— la réglette mobile
— le curseur possédant un trait central pour la lecture.

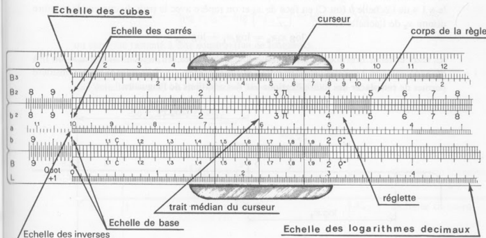


Fig. 5

Il existe dans certains modèles d'autres lettres que celles indiquées à la figure 5 pour désigner les diverses échelles. Par exemple

au lieu de B^3	il y a K	(échelle des cubes)
— B^2	— A	(— — carrés)
— b^2	— B	(— — carrés)
— a	— CI	(— — inverses)
— b	— C	(— de base)
— B	— D	(— de base)
— L	— L	(— logarithmes décimaux).

Il existe encore d'autres notations. *Observez bien le modèle que vous possédez.*

b) Échelle logarithmique. Multiplication.

Sur un axe $x'x$ muni d'un repère, portons les points d'abscisses :

$\log 1 = 0, \quad \log 2 \simeq 0{,}301\ 0, \quad \log 3 \simeq 0{,}477\ 1, \quad \ldots, \quad \log 10 = 1.$

Si au lieu de marquer les abscisses :

0   0,301 0   0,477 1   ...   1

on marque simplement les nombres :

1   2   3   ...   10,

on obtient ce qu'on appelle une **échelle logarithmique** (fig. 6).

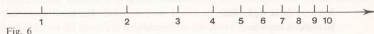


Fig. 6

Soit à calculer $N = x_1x_2$. Sur l'échelle B (ou D) on repère le nombre donné x_1. On place le « 1 » de l'échelle b (ou C) en face de x_1 et on repère avec le trait du curseur le nombre donné x_2 de l'échelle b.

$$\log x_1x_2 = \log x_1 + \log x_2,$$

les deux échelles B et b étant des échelles logarithmiques, au lieu de lire $\log x_1x_2$ on lira directement sur l'échelle B le nombre $N = x_1x_2$ (fig. 7). L'isomorphisme considéré permet de **remplacer des multiplications par des additions de longueurs.**

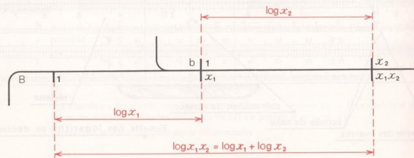


Fig. 7

On notera que la règle à calcul permet seulement de trouver les chiffres significatifs du produit. *L'ordre de grandeur du résultat n'est pas obtenu par lecture sur la règle, mais par calcul approché direct;* on remplace les nombres donnés par des nombres plus simples pour pouvoir situer le nombre N cherché entre deux puissances successives de 10 :

$$10^n \leqslant N < 10^{n+1},$$

N s'écrira alors : $N = a \times 10^n$ où $1 \leqslant a < 10$. *La règle à calcul permet seulement la détermination de a.*

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

x_1	x_2	$x_1 \times x_2$	x_1	x_2	$x_1 \times x_2$
15,8	3,1	$4{,}9 \times 10$	8,02	11,1	$8{,}9 \times 10$
134	0,57	$7{,}63 \times 10$	4,28	14,8	$6{,}33 \times 10$
1,23	4,3	5,29	17,05	0,179	3,05
40,5	1,63	$6{,}60 \times 10$	133,5	0,336	$4{,}48 \times 10$
61,5	1,26	$7{,}75 \times 10$	2,47	2290	$5{,}66 \times 10^3$

c) Emploi de l'échelle des inverses.

Soit à calculer $N = 5{,}58 \times 0{,}732$. La méthode précédente n'est pas applicable puisque si l'on met bout à bout les segments correspondant à $\log 5{,}58$ et $\log 0{,}732$, on obtient $\log 5{,}58 + \log 0{,}732$ à l'extérieur de la règle.

On peut procéder de la façon suivante. Soit $N = x_1x_2$.

$$\log x_1x_2 = \log\left(x_1 : \frac{1}{x_2}\right) = \log x_1 - \log \frac{1}{x_2},$$

on est donc ramené à une **soustraction de longueurs.**

Sur l'échelle B (ou D) on repère x_1 à l'aide du trait du curseur.

Sur ce trait du curseur on indique x_2 de l'échelle des inverses a (ou CI). En face du « 1 » de l'échelle b (ou C) on lit le résultat $N = x_1x_2$ (fig. 8).

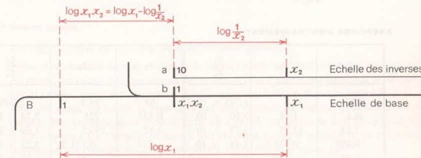


Fig. 8

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

x_1	x_2	$x_1 \times x_2$	x_1	x_2	$x_1 \times x_2$
7,5	4,1	$3,07 \times 10$	41,7	0,763	$3,18 \times 10$
5,45	37	$2,02 \times 10^2$	572	0,0269	$1,540 \times 10$
31,3	0,465	$1,445 \times 10$	5,58	0,732	4,08
5,05	2,21	$1,115 \times 10$	885	0,002 51	2,22
3,73	0,343	1,28	9550	0,279	$2,66 \times 10^3$

d) Division.

Soit à calculer $N = \frac{x_1}{x_2}$.

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \log x_1 - \log x_2,$$

suivant le trait du curseur on affiche x_1 de l'échelle B (ou D) et x_2 de l'échelle b (ou C). On lit le résultat sur l'échelle B (ou D) en face du « 1 » de l'échelle b (ou C) (fig. 9).

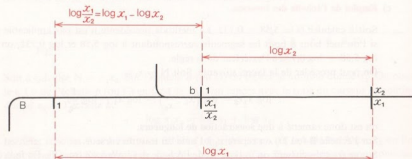


Fig. 9

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

x_1	x_2	$\frac{x_1}{x_2}$	x_1	x_2	$\frac{x_1}{x_2}$
0,381	21,8	$1,745 \times 10^{-2}$	68	38,9	1,745
36,6	1,18	$3,10 \times 10$	0,535	225	$2,38 \times 10^{-3}$
5,13	13,75	$3,73 \times 10^{-1}$	3,37	199,5	$1,69 \times 10^{-2}$
0,895	0,025 7	$3,48 \times 10$	271	0,121 5	$2,23 \times 10^3$
6,05	458	$1,32 \times 10^{-2}$	0,722	243	$2,97 \times 10^{-3}$

Si on est « hors règle », par exemple pour N = 47,2 : 71,3, on peut procéder en utilisant l'échelle des inverses :

$$\log \frac{x_1}{x_2} = \log \left(x_1 \times \frac{1}{x_2}\right) = \log x_1 + \log \frac{1}{x_2};$$

en face de la graduation où on lit x_1 de l'échelle B (ou D), on place le « 10 » de l'échelle des inverses. Puis l'on repère avec le trait du curseur le nombre x_2 de l'échelle des inverses et on lit le résultat en face de ce trait du curseur sur l'échelle B (ou D) (fig. 10).

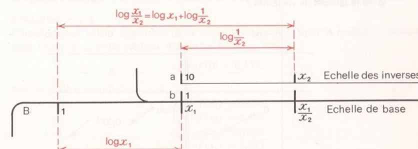


Fig. 10

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

x_1	x_2	$\frac{x_1}{x_2}$	x_1	x_2	$\frac{x_1}{x_2}$
14,15	0,255	$5,55 \times 10$	0,235	4,35	$5,40 \times 10^{-2}$
2,43	81,5	$2,98 \times 10^{-2}$	47,2	51,3	$9,21 \times 10^{-1}$
87,2	0,925	$9,42 \times 10$	51,3	0,627	$8,19 \times 10$
4,35	0,074 3	$5,85 \times 10$	0,632	0,081 5	7,75
182,5	0,375	$4,86 \times 10^2$	0,091 5	0,985	$0,28 \times 10^{-2}$

e) Autres calculs.

Une règle à calcul est aussi une table de fonctions usuelles.

Nous avons indiqué dans le modèle de la figure 5 quelques échelles donnant les inverses, les carrés, les cubes, les logarithmes décimaux. (Dans d'autres modèles plus perfectionnés, il existe d'autres échelles encore dont l'emploi est indiqué dans une notice.)

Pour cet usage, on utilise la règle à calcul sans déplacer la réglette mais seulement le curseur. Par exemple, pour avoir le cube de $x = 7,5$, on amène le trait du curseur sur « 7,5 » figurant sur l'échelle de base B (ou D) et on lit sur le même trait du curseur le nombre x^3 sur l'échelle des cubes B^3 (ou K). On lit $(7,5)^3 \simeq 4,2 \times 10^2$.

Inversement, en plaçant le trait du curseur sur une division de l'échelle B^3 (ou K) on déduira la racine cubique sur l'échelle de base B (ou D).

Exercice résolu.

Étudier la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{0{,}537}{x^3+1}$. *Calculer, avec trois chiffres significatifs,* $x_1 = f(0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, $x_4 = f(x_3)$, $x_5 = f(x_4)$. *En déduire un encadrement de la racine* x_0 *positive de l'équation* $x^4 + x - 0{,}537 = 0$.

Pour tout $x \neq -1$, la fonction est définie, continue et dérivable, sa dérivée étant

$$f'(x) = -0{,}537 \times \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}$$

d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	$0{,}537$	↘	0

et la représentation graphique Γ de f (fig. 11) (on a supposé le repère orthonormé).

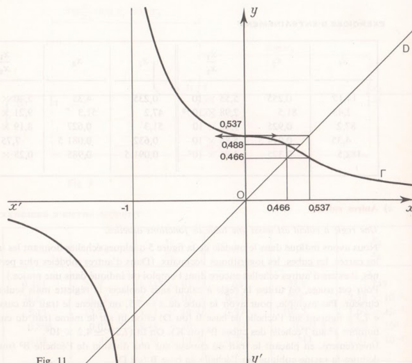


Fig. 11

Le point de cordonnées $x = 0$ et $f(0) = 0{,}537$ est un point d'inflexion puisque la courbe « traverse » la tangente en ce point qui est parallèle à Ox.

Pour tout x réel,

(1) $\quad x^4 + x - 0{,}537 = 0 \Longleftrightarrow x(x^4+1) = 0{,}537 \quad$ (2)

$$\Longleftrightarrow x = \frac{0{,}537}{x^3+1} \quad \text{car} \quad x = -1$$

n'est pas racine de l'équation (2). La résolution de (1) revient à la recherche des abscisses des points communs à la courbe Γ précédente d'équation $y = \dfrac{0{,}537}{x^3+1}$ et à la droite D d'équation $y = x$.

Cherchons une valeur approchée de la racine positive de (1) par la méthode, indiquée dans l'énoncé, appelée **méthode d'itération** (voir fig. 12).

$$x_1 = f(0) = 0{,}537;$$

avec la règle à calcul, on trouve :

$$x_2 = f(x_1) = 0{,}466$$
$$x_3 = f(x_2) = 0{,}488$$
$$x_4 = f(x_3) = 0{,}482$$
$$x_5 = f(x_4) = 0{,}483$$

d'où un encadrement de la racine x_0 cherchée :

$$0{,}482 < x_0 < 0{,}483.$$

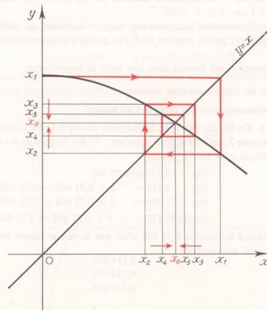


Fig. 12

6. 8. UTILISATION D'UNE TABLE DE LOGARITHMES

On sait que la fonction logarithme de base 10 est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$. *Comme pour la règle à calcul, le principe de la table de logarithme repose essentiellement sur l'existence de cet isomorphisme.*

a) Caractéristique et mantisse d'un logarithme.

Soit x un nombre réel > 0, il existe un entier relatif unique n tel que $10^n \leqslant x < 10^{n+1}$; il existe donc un nombre réel unique $x' > 0$ tel que :

$$x = 10^n x' \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant x' < 10$$

d'où :

$$\log x = \log 10^n + \log x' = n + \log x'$$

avec :

$$0 \leqslant \log x' < 1.$$

Par exemple :

$$\log \ 5\,177 = \log (10^3 \times 5{,}177) = 3 + \log 5{,}177$$
$$\log \ 517\,700 \quad \log (10^5 \times 5{,}177) = 5 + \log 5{,}177$$
$$\log 0{,}005\,177 = \log (10^{-3} \times 5{,}177) = -3 + \log 5{,}177.$$

Le nombre n est appelé la **caractéristique** de $\log x$.
Si $x \geqslant 1$, la caractéristique est le nombre de chiffres, diminué de 1, de la partie entière de x écrit dans le système décimal.
Si $0 < x < 1$, la caractéristique est un entier strictement négatif, sa valeur absolue est le rang du premier chiffre non nul situé après la virgule dans l'écriture décimale de x. Lorsque la caractéristique est négative au lieu d'écrire $n = -n'$ on l'écrit $\overline{n'}$; ainsi la caractéristique de log 0,005 177 est $\overline{3}$.
Le nombre $\log x'$ est appelé la **mantisse** de $\log x$, c'est un **nombre positif strictement inférieur à 1** car $1 \leqslant x' < 10$.
Ainsi tous les nombres qui, dans leur écriture décimale, ne diffèrent que par la place de la virgule ou par le nombre de 0 mis après le dernier chiffre significatif ont même mantisse.
Seule la mantisse est donnée dans une table de logarithmes.

b) Recherche du logarithme d'un nombre.

Nous raisonnerons avec une table à 5 décimales.

Exemple 1. On lit, par exemple, la mantisse de log 5 177 à l'intersection de la ligne 517 et de la colonne 7; on trouve pour mantisse : 71 408 (le groupe des deux premiers chiffres : 71 est indiqué plus haut). Donc :

$$\log \ 5{,}177 = 0{,}71\,408$$
$$\log \ 5\,177 = \ 3 + 0{,}71\,408 = 3{,}71\,408$$
$$\log \ 517\,700 = \ 5 + 0{,}71\,408 = 5{,}71\,408$$
$$\log 0{,}005\,177 = -\ 3 + 0{,}71\,408 = \overline{3}{,}71\,408$$

mais en réalité le nombre 0,71 408 n'est pas la valeur exacte de log 5,177. Le nombre 0,71 408 peut provenir de

0,714 075 ....
0,714 076 ....
0,714 078 ....
....
0,714 084 ....

donc une table de logarithmes à **5 décimales** donne une valeur approchée des mantisses, donc des logarithmes, à 5.10^{-6} **près.** Plus généralement une table de logarithmes à p décimales donne une valeur approchée des logarithmes à $5.10^{-(p+1)}$ près. **On ne connaît pas le sens de l'approximation.**

REMARQUE

Pour l'écriture d'un logarithme avec 5 décimales, nous adoptons la disposition de la table à 5 décimales. Par exemple, nous écrirons

$$\log 5\,177 = 3{,}71\,408$$

au lieu de

$$\log 5\,177 = 3{,}714\,08$$

parce que la mantisse est 71 408 (il s'agit de $71\,408.10^{-5}$).

Exemple 2. Soit à calculer log 67,65. A l'intersection de la ligne 676 et de la colonne 5, on lit * 027. L'étoile indique qu'il faut aller chercher les deux premiers chiffres de la mantisse dans la ligne suivante; on trouve 83 d'où :

$$\log 67{,}65 = 1{,}83\,027.$$

Exemple 3. Si le nombre a plus de quatre chiffres significatifs, par exemple $x = 3\,252{,}4$, on lit dans la table :

pour 3 252	51 215
pour 3 253	51 228

nous devons procéder à une **interpolation linéaire.** Rappelons la méthode dans le cas général d'une fonction f strictement monotone sur un intervalle I et supposons que l'on connaisse les valeurs de f pour 1, 2, 3, ..., n, $n+1$, ... appartenant à I. Nous nous proposons de calculer $f(x)$ pour x tel que

$$n < x < n + 1.$$

On fait l'approximation suivante : on remplace dans l'intervalle $[n, n+1]$ la fonction f par une fonction affine g telle que :

$$g(n) = f(n) \quad \text{et} \quad g(n+1) = f(n+1)$$

et on prend pour valeur approchée de $f(x)$ la valeur $g(x)$. Graphiquement cela revient à remplacer l'arc de courbe représentant f sur $[n, n+1]$ par un segment de droite (fig. 13).

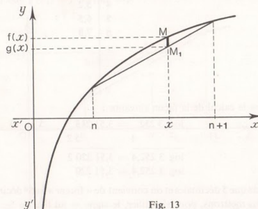


Fig. 13

Nous savons que pour une fonction affine, quels que soient $x_1 \neq x_2$, il existe un nombre a tel que :

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

donc :

$$\frac{g(x) - g(n)}{x - n} = \frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n} = f(n+1) - f(n)$$

d'où, puisque $g(n) = f(n)$:

$$g(x) = f(n) + (x - n)[f(n+1) - f(n)].$$

Une valeur approchée de $f(x)$ est $g(x)$. Sur la figure 13, l'erreur commise est représentée par $\overline{M_1M}$; vous apprendrez plus tard à calculer un majorant de $|f(x) - g(x)|$ dans $[n, n+1]$. Les tables sont conçues de manière que cette erreur soit négligeable devant l'erreur due aux tables c'est-à-dire l'erreur commise sur la donnée des valeurs approchées de $f(n)$ et de $f(n+1)$ (qui est de 5.10^{-6} dans une table de logarithmes à 5 décimales). Le nombre $f(n+1) - f(n)$ s'appelle la **différence tabulaire** de f dans $[n, n+1]$.

Dans l'exemple précédent :

$$f(n+1) = \log 3\,253 = 3{,}51\,228$$
$$f(n) = \log 3\,252 = 3{,}51\,215$$

la différence tabulaire est $f(n+1) - f(n) = 13.10^{-5}$ d'où :

$$g(3\,252{,}4) = 3{,}51\,215 + 0{,}4 \times 13.10^{-5}$$

les petites tables d'interpolation figurant en marge des tables de logarithmes permettent d'éviter le calcul du produit

$$(x - n)[f(n+1) - f(n)] = 0{,}4 \times 13.10^{-5}$$

on lit ce produit dans la table d'interpolation relative à 13 (il s'agit de 13.10^{-5}); c'est le nombre associé à 4 (il s'agit de 0,4 dans notre exemple) qui est 5,2 (il s'agit de $5{,}2.10^{-5}$).

	13
1	1,3
2	2,6
3	3,9
4	5,2
5	6,5
6	7,8
.	.
.	.
.	.

On dispose le calcul de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll} \log 3\,252 & = 3{,}51\,215 & \Delta = 13 \\ \quad 4 & \quad\quad\;\; 5\,2 & \\ \hline \log 3\,252{,}4 & = 3{,}51\,220\,2 & \\ \log 3\,252{,}4 & = 3{,}51\,220 & \end{array}$$

on ne garde que 5 décimales et on convient de « forcer » la 5e décimale si la 6e est 5, 6, 7, 8 ou 9. Nous mettrons, pour simplifier, le signe = au lieu de $\simeq$.

Exemple 4. Soit à calculer log 3 252,46. On écrit :

$$\begin{array}{lll} \log 3\,252 & = 3{,}51\,215 & \Delta = 13 \\ \quad\quad 4 = & \quad\quad\; 5\,2 & \\ \quad\quad 6 = & \quad\quad\; 0\,78 & \\ \hline \log 3\,252{,}46 & = 3{,}51\,220\,98 & \\ \log 3\,252{,}46 & = 3{,}51\,221. & \end{array}$$

Lorsque le nombre donné x contient plus de 6 chiffres significatifs, il est inutile de faire des interpolations linéaires sur les chiffres significatifs placés après le sixième puisqu'on ne garde que 5 décimales pour $\log x$.

c) Recherche d'un nombre dont le logarithme est connu.

Connaissant $\log x$, il s'agit de déterminer x. La mantisse de $\log x$ va nous permettre de trouver les chiffres significatifs de x à l'aide de la table; ensuite la caractéristique nous permettra de déterminer complètement x.

Exemple 5. Soit $\log x = \bar{2}{,}91\,036$

la mantisse 91 036 se trouve dans la table et elle est à l'intersection de la ligne 813 et de la colonne 5 donc cette mantisse est associée au nombre 8 135. Puisque la caractéristique est $\bar{2}$,

$$x = 0{,}081\,35.$$

Exemple 9. Soit $\log x = 2{,}27\,819$

la mantisse 27 819 n'est plus dans la table mais on a

$$27\,807 < 27\,819 < 27\,830,$$

les mantisses 27 807 et 27 830 figurant dans la table. Nous devons procéder à une interpolation linéaire.

Dans l'intervalle $[n, n+1]$ la fonction f (ici la fonction logarithme de base 10) est remplacée par une fonction affine g telle que :

$$g(n) = f(n) \quad \text{et} \quad g(n+1) = f(n+1).$$

La méthode consiste à prendre pour valeur approchée de x, lorsque

$$n < x < n+1,$$

le nombre x_1 tel que $g(x_1) = f(x)$ (fig. 14)

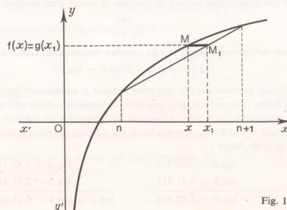


Fig. 14

$$\frac{g(x_1)-g(n)}{x_1-n}=\frac{g(n+1)-g(n)}{(n+1)-n}=f(n+1)+f(n)$$

d'où

$$x_1-n=\frac{f(x)-f(n)}{f(n+1)-f(n)}$$

$$x_1=n+\frac{f(x)-f(n)}{f(n+1)-f(n)}$$

l'erreur commise en prenant x_1 pour valeur approchée de x est représentée sur la figure 14 par $\overline{M_1M}$; vous apprendrez plus tard à calculer un majorant de $|x-x_1|$ dans $[n, n+1]$. Une table est conçue pour que cette erreur soit négligeable devant celle qui est due à la table qui donne des valeurs approchées de $f(n)$ et de $f(n+1)$.

Dans l'exemple précédent : $\log x = 2{,}27\,819$

la mantisse de $n+1 = 1\,898$ est $27\,830$ (plus précisément $27\,830 . 10^{-5}$)

de $n = 1\,897$ $27\,807$

différence tabulaire : $\Delta = 23$

$$f(x)-f(n)=12$$

$$x_1=n+\frac{f(x)-f(n)}{f(n+1)-f(n)}=1\,897+\frac{12}{23}$$

pour avoir x il restera à mettre la virgule (ou des zéros) convenablement, la petite table d'interpolation relative à 23 figurant en marge de la table des logarithmes évite de faire le calcul du quotient $\frac{12}{23}$. On écrit :

$$\begin{array}{lll} \log x & = 2{,}27\,819 & \\ \log 189{,}7 & = 2{,}27\,807 & \Delta = 23 \\ \quad\ 5 & \quad\ 11\,5 & \\ \quad\ 2 & \quad\ \ 0\,46 & \\ \hline \log 189{,}752 & = 2{,}27\,818\,96 & \\ x & = 189{,}752 & \end{array}$$

d) Opérations sur les logarithmes.

L'utilisation des logarithmes permet de ramener le calcul d'un nombre tel que :

$$x=\frac{ab^r}{c},$$

où a, b, c sont strictement positifs et r un nombre rationnel, au calcul de

$$\log x = \log a + r \log b - \log c.$$

La seule difficulté provient du fait que pour trouver x connaissant $\log x$ il faut mettre $\log x$ sous la forme : *caractéristique* + *mantisse*, la mantisse m étant telle que $0 \leqslant m < 1$. Pour l'addition aucune difficulté : la somme des mantisses de $\log a$ et $\log b$ donne la mantisse de $\log a + \log b$ avec une retenue 1, s'il y a lieu, qui vient s'ajouter à la somme des caractéristiques. Ainsi :

$$\begin{array}{l} \log a = 2{,}30\,512 \\ \log b = \bar{3}{,}41\,813 \\ \hline \log a + \log b = \bar{1}{,}72\,325 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \log a = 5{,}42\,718 \\ \log b = \bar{2}{,}71\,315 \\ \hline \log a + \log b = 4{,}14\,033 \end{array}$$

il n'y a aucune difficulté, non plus, pour la multiplication d'un logarithme par un entier positif, ainsi :

$$\begin{array}{r} \log a = \bar{1}{,}38\,217 \\ \times\ 4 \\ \hline 4 \log a = \bar{3}{,}52\,868 \end{array}$$

car $4 \times (\bar{1}{,}38\,217) = 4\,[(-1) + 0{,}38\,217] = (-4) + (1{,}52\,868) = (-3) + 0{,}52\,868$.

Pour la division d'un logarithme par un nombre entier positif n on procédera comme le montrent les exemples suivants :

$$\frac{1}{2}\log a = \frac{4{,}42\,373}{2} = 2{,}21\,186$$

$$\frac{1}{5}\log a = \frac{6{,}31\,276}{5} = 1{,}26\,255$$

$$\frac{1}{3}\log a = \frac{\bar{6}{,}23\,785}{3} = \bar{2}{,}07\,928$$

$$\frac{1}{3}\log a = \frac{\bar{2}{,}74\,391}{3} = \frac{(-2)+0{,}74\,391}{3} = \frac{(-3)+1{,}74\,391}{3}$$

$$= (-1) + 0{,}58\,130$$

$$= \bar{1}{,}58\,130.$$

En revanche dans le calcul de $\log a - \log b$ la différence des deux mantisses est un nombre positif ou négatif; l'introduction du **cologarithme** d'un nombre va nous permettre de nous ramener à une addition de logarithmes.

On appelle cologarithme d'un nombre $x > 0$ le logarithme de son inverse. Le cologarithme de x s'écrit colog x; on a :

$$\text{colog } x = \log \frac{1}{x} = -\log x$$

donc le cologarithme d'un nombre est aussi l'opposé de son logarithme. Désignons par c et m la caractéristique et la mantisse de $\log x$ et cherchons à mettre colog x sous la forme : *caractéristique* + *mantisse*, soit c' et m' cette caractéristique et cette mantisse. On peut écrire :

$$\log x + \text{colog } x = 0$$

$$(c+m) + (c'+m') = 0$$

$$(c+c') + (m+m') = 0$$

on prendra c' et m' de manière que :

$$\begin{cases} c + c' = -1 \\ m + m' = 1 \end{cases}$$

d'où : $c' = -(1+c)$ et $m' = 1 - m$.

Exemple :

$$\log x = \bar{4}{,}31\,273$$

$$\text{colog } x = 3{,}68\,727$$

e) Logarithmes des valeurs des fonctions circulaires.

La méthode est la même que précédemment. On n'oubliera pas, dans l'interpolation linéaire, que les fonctions :

$$x \longmapsto \log \sin x$$

$$x \longmapsto \log \operatorname{tg} x$$

sont strictement *croissantes* sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$, tandis que les fonctions :

$$x \longmapsto \log \cos x$$
$$x \longmapsto \log \operatorname{cotg} x$$

sont strictement *décroissantes* sur $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

Donnons des exemples.

Exemple 7. Soit à calculer log sin 29°15′29″.
On lit log sin 29°15′ à la page « 29 degrés » (qu'on lit en haut), à l'intersection de la ligne « 15′ » (lu dans la première colonne, à gauche) et de la colonne « sin » (lu en haut) :

$$\begin{array}{rcll} \log \sin 29^{\circ}15' & = & \bar{1},68\,897 & \Delta = 23 \\ 20'' & & 7\,7 & \\ 9'' & & 3\,5 & \\ \hline \log \sin 29^{\circ}15'29'' & = & \bar{1},68\,908\,2 & \\ \log \sin 29^{\circ}15'29'' & = & \bar{1},68\,908 & \end{array}$$

Exemple 8. Soit à calculer log cos 58,273 gr.
On lit log cos 58,28 gr à la page « 58 grades » (lu en bas), à l'intersection de la ligne « 28 cgr » (lu dans la dernière colonne, à droite) et de la colonne « cos » (lu en bas)

$$\begin{array}{rcll} \log \cos 58{,}28\ \text{gr} & = & \bar{1},78\,492 & = 9 \\ -\ 7 & & 6\,3 & \\ \hline \log \cos 58{,}273\ \text{gr} & = & \bar{1},78\,498\,3 & \\ \log \cos 58{,}273\ \text{gr} & = & \bar{1},78\,498. & \end{array}$$

REMARQUE

On pourrait faire une interpolation linéaire en partant de log cos 58,27 gr, on aurait alors une *diminution* de la mantisse.

Exemple 9.

$$\begin{array}{rcll} \log \operatorname{tg} (x^{0}) & = & \bar{1},82\,331 & \\ \log \operatorname{tg} 33^{\circ}39' & = & \bar{1},82\,325 & \Delta = 27 \\ 10'' & & 4\,5 & \\ 3'' & & 1\,35 & \\ \hline \log \operatorname{tg} 33^{\circ}39'13'' & = & \bar{1},82\,330\,85 & \end{array}$$

l'angle aigu cherché est : 33°39′13″.

f) Cas des « petits angles ».

Nous supposerons les angles aigus.
Lorsque l'angle est inférieur à 3 grades ou 4 degrés s'il s'agit de log sin x ou de log tg x (supérieur à 97 grades ou 86 degrés s'il s'agit de log cos x ou de log cotg x), la méthode d'interpolation linéaire est peu précise et l'on procède autrement.
La table donne :

$$S = \log \frac{\sin x}{x} = \log \sin x - \log x,$$

dans log x l'*angle est mesuré en centigrades ou en secondes*. On peut alors calculer log sin x connaissant S et log x et calculer log x donc x connaissant S et log sin x.

De même, la table donne :

$$T = \log \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \log \operatorname{tg} x - \log x,$$

dans log x l'*angle est encore mesuré en centigrades ou en secondes.*

Exemple 10. Soit à calculer log sin 2°10′15″.

$$\begin{array}{rcll} 2^{\circ}10' & = & 7\,800'' & \text{(donné dans la table)} \\ 2^{\circ}10'15'' & = & 7\,815'' & \\ S & = & \bar{6},68\,547\,1 & \\ \log 7\,815 & = & 3,89\,293 & \\ \hline & & \bar{2},57\,840\,1 & \\ \log \sin 2^{\circ}10'15'' & = & \bar{2},57\,840. & \end{array}$$

On vérifie que $\bar{2},57\,840$ est compris entre log sin 2°10′ = $\bar{2},57\,757$ et log sin 2°11′ = $\bar{2},58\,089$ qui sont donnés dans la table.

6.10 EXERCICES RÉSOLUS

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation*

(1) $$\sqrt{a - \sqrt{x}} + \sqrt{a + \sqrt{x}} = \sqrt[4]{bx}$$

(a et b réels donnés, x réel cherché).

Application numérique : calculer x si l'on donne

$$a = 1{,}359 \qquad b = 21{,}538.$$

$\sqrt{x}$ n'a de sens que si $x \geqslant 0$.
$x = 0$ n'est solution de (1) que si $a = 0$, quel que soit b réel.
Si $x > 0$, $\sqrt[4]{bx}$ n'a de sens que si $b \geqslant 0$ et $\sqrt{a - \sqrt{x}}$ et $\sqrt{a + \sqrt{x}}$ n'ont de sens que si $-a \leqslant \sqrt{x} \leqslant a$ c'est-à-dire $a \geqslant 0$ et $0 \leqslant x \leqslant a^2$.

Donc si (1) a une solution *non nulle*, on a nécessairement :

(2) $$\begin{cases} a > 0 \\ b \geqslant 0 \\ 0 < x \leqslant a^2. \end{cases}$$

Quels que soient a, b, x réels vérifiant les conditions (2), les deux membres de (1) sont définis et positifs ou nuls donc en élevant au carré les deux membres de (1) on obtient l'équation équivalente :

(3) $$2a + 2\sqrt{a^2 - x} = \sqrt{bx}.$$

Quels que soient a, b, x réels vérifiant les conditions (2), les deux membres de (3) sont aussi définis et positifs ou nuls donc en élevant au carré les deux membres de (3) on obtient l'équation équivalente :

$$4a^2 + 8a\sqrt{a^2 - x} + 4(a^2 - x) = bx$$

qui est équivalente à :

(4) $$8a\sqrt{a^2 - x} = (b + 4)x - 8a^2.$$

Quels que soient a, b, x réels vérifiant les conditions (2), on peut écrire les équivalences :

$$(4) \iff \begin{cases} 64\,a^2\,(a^2 - x) = [(b+4)\,x - 8\,a^2]^2 & (5) \\ (b+4)\,x - 8\,a^2 \geqslant 0 & (6) \end{cases}$$

$$(5) \iff x\left[x - \frac{16\,a^2 b}{(b+4)^2}\right] = 0 \quad \text{(après simplification de (5))}$$

$$(6) \iff x \geqslant \frac{8\,a^2}{b+4}. \quad (7)$$

Nous avons déjà étudié le cas $x = 0$.

$x = \dfrac{16\,a^2\,b}{(b+4)^2}$ n'est solution non nulle de (1) que si les conditions (2) et (7) sont vérifiées c'est-à-dire si et seulement si : $\begin{cases} a > 0 \\ b \geqslant 0 \\ \dfrac{8\,a^2}{b+4} \leqslant \dfrac{16\,a^2 b}{(b+4)^2} \leqslant a^2. \end{cases}$

Quels que soient $a > 0$ et $b \geqslant 0$,

$$\frac{8\,a^2}{b+4} \leqslant \frac{16\,a^2 b}{(b+4)^2} \iff b + 4 \leqslant 2\,b \iff b \geqslant 4$$

$$\frac{16\,a^2 b}{(b+4)^2} \leqslant a^2 \iff 16\,b \leqslant (b+4)^2$$

$$\iff (b-4)^2 \geqslant 0 \quad \text{vérifiée.}$$

Conclusion :

si $a = 0$ et b réel quelconque, la solution de (1) est $x = 0$

si $a > 0$ et $b \geqslant 4$, la solution de (1) est $x = \dfrac{16\,a^2 b}{(b+4)^2}$

dans les autres cas, (1) n'a pas de solution.

Application numérique.

Pour $a = 1{,}359$ et $b = 21{,}538$, les conditions $a > 0$ et $b \geqslant 4$ sont vérifiées et la solution de (1) est :

$$x = \frac{16 \times (1{,}359)^2 \times 21{,}538}{(25{,}538)^2}.$$

Nous avons : $\log x = \log 16 + 2 \log 1{,}359 + \log 21{,}538 + 2 \operatorname{colog} 25{,}538$.

On peut disposer les calculs de la manière suivante. Nous avons écrit les logarithmes avec 5 décimales.

Calculs auxiliaires

$\log\ 1{,}359 = 0{,}13\ 322$
$2 \log\ 1{,}359 = 0{,}26\ 644$
$\log\ 21{,}53 = 1{,}33\ 304 \quad \Delta = 21$
$\quad 8 \qquad 16\ 8$
$\log\ 21{,}538 = 1{,}33\ 321$
$\log\ 25{,}53 = 1{,}40\ 705 \quad \Delta = 17$
$\quad 8 \qquad 13\ 6$
$\log\ 25{,}538 = 1{,}40\ 719$
$\operatorname{colog}\ 25{,}538 = \bar{2}{,}59\ 281$
$2 \operatorname{colog}\ 25{,}538 = \bar{3}{,}18\ 562$

Calculs définitifs

$\log 16 = 1{,}20\ 412$
$2 \log\ 1{,}359 = 0{,}26\ 644$
$\log\ 21{,}538 = 1{,}33\ 321$
$2 \operatorname{colog}\ 25{,}538 = \bar{3}{,}18\ 562$
$\log x = \bar{1}{,}98\ 939$
$\log\ 0{,}975\ 8 = \bar{1}{,}98\ 936 \quad \Delta = 5$
$\quad 6 \qquad 3$
$\log\ 0{,}975\ 86 = \bar{1}{,}98\ 939$
$x = 0{,}975\ 86$

2. *Étudier la fonction numérique de la variable réelle $f : x \longmapsto x - \mathrm{Log}\,|x-2|$.*
Calculer l'aire de la partie Δ définie par

$$\begin{cases} 4 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

(On suppose le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé).
Donner un encadrement de cette aire sachant que l'on connaît les valeurs approchées suivantes, à 5.10^{-5} près :

$$\mathrm{Log}\ 2 = 0{,}693\ 1$$
$$\mathrm{Log}\ 3 = 1{,}098\ 6$$

La fonction $f : x \longmapsto x - \mathrm{Log}\,|x-2|$ est définie pour tout $x \neq 2$.
Elle est également continue et dérivable pour tout $x \neq 2$, sa dérivée étant :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}$$

d'où le tableau de variation

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

Nous avons indiqué dans le tableau les limites aux bornes que l'on étudie de la façon suivante :

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} (-\,\mathrm{Log}\,|x-2|) = -\infty$$

d'où
$$\lim_{x \to -\infty} (x - \mathrm{Log}\,|x-2|) = -\infty;$$

on ne peut raisonner ainsi pour $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, on peut écrire pour tout x différent de 0 et de 2 :

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\mathrm{Log}\,|x-2|}{x}\right)$$

$$(1) \qquad f(x) = x\left(1 - \frac{\mathrm{Log}\,|x-2|}{x-2}\,\frac{x-2}{x}\right);$$

on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{Log}\,|x-2|}{x-2} = 0 \quad \text{(cf. § 6.2 c)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x} = 1$$

d'où
$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\mathrm{Log}\,|x-2|}{x-2}\,\frac{x-2}{x}\right) = 1$$

par suite
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty;$$

d'autre part $\lim_{x \to 2} \text{Log} \mid x - 2 \mid = -\infty$ (cf § 6.2 b)

d'où $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote.

Par ailleurs en utilisant (1) :

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \to +\infty} \left(1 - \frac{\text{Log} \mid x - 2 \mid}{x - 2} \frac{x - 2}{x}\right) = 1$$

et nous avons :

$$\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{|x| \to +\infty} (- \text{Log} \mid x - 2 \mid) = -\infty$$

donc la courbe représentative (fig. 15) admet une branche parabolique, la direction asymptotique étant celle de la droite d'équation $y = x$ (cf. § 3.5 d).

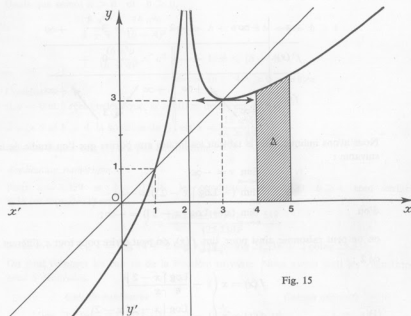


Fig. 15

Les points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y = x$ ont pour abscisses les solutions de l'équation :

(2) $x - \text{Log} \mid x - 2 \mid = x$.

Pour tout x réel,

(2) $\Longleftrightarrow$ $\text{Log} \mid x - 2 \mid = 0$

(2) $\Longleftrightarrow$ $\mid x - 2 \mid = 1$

(2) $\Longleftrightarrow$ $(x - 2 = 1$ ou $x - 2 = -1)$

(2) $\Longleftrightarrow$ $(x = 3$ ou $x = 1)$

Calcul de l'aire.

$$\mathcal{A}(\Delta) = \int_4^5 (x - \text{Log} \mid x - 2 \mid) \, dx$$

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_4^5 - \int_4^5 \text{Log}\,(x - 2)\, dx$$

$$\mathcal{A}(\Delta) = 4{,}5 - \int_4^5 \text{Log}\,(x - 2)\, dx$$

pour calculer l'intégrale $\text{I} = \int_4^5 \text{Log}\,(x - 2)\, dx$ faisons une intégration par parties (cf. § 5.7 b) :

$$\text{I} = \int_4^5 \text{Log}\,(x - 2) \times g'(x)\, dx$$

avec $g(x) = x - 2$, $g'(x) = 1$

d'où

$$\text{I} = [g(x)\, \text{Log}\,(x - 2)]_4^5 - \int_4^5 (\text{Log}\,(x - 2))'\, g(x)\, dx$$

$$\text{I} = [(x - 2)\, \text{Log}\,(x - 2)]_4^5 - \int_4^5 \frac{x - 2}{x - 2}\, dx$$

$$\text{I} = [(x - 2)\, \text{Log}\,(x - 2) - x]_4^5$$

$$\text{I} = 3\, \text{Log}\, 3 - 2\, \text{Log}\, 2 - 1$$

d'où

$$\mathcal{A}(\Delta) = 4{,}5 - 3\, \text{Log}\, 3 + 2\, \text{Log}\, 2 + 1$$

$$\mathcal{A}(\Delta) = 5{,}5 - 3\, \text{Log}\, 3 + 2\, \text{Log}\, 2.$$

Une valeur approchée de $\mathcal{A}(\Delta)$ est :

$$5{,}5 - 3 \times 1{,}098\,6 + 2 \times 0{,}693\,1 = 3{,}590\,4.$$

L'incertitude sur $3\, \text{Log}\, 3$ est : $5.10^{-5} \times 3 = 15.10^{-5} = 1{,}5.10^{-4}$

sur $2\, \text{Log}\, 2$ $5.10^{-5} \times 2 = 10.10^{-5} = 10^{-4}$

sur $\mathcal{A}(\Delta)$ $1{,}5.10^{-4} + 10^{-4} = 2{,}5.10^{-4}$.

D'où un encadrement de $\mathcal{A}(\Delta)$:

$$3{,}590\,4 - 2{,}5.10^{-4} \leqslant \mathcal{A}(\Delta) \leqslant 3{,}590\,4 + 2{,}5.10^{-4}$$

$$3{,}590\,15 \leqslant \mathcal{A}(\Delta) \leqslant 3{,}590\,65$$

3. Dans l'exercice précédent on connaissait les logarithmes népériens de 2 et de 3 (qui sont donnés dans les tables). Dans le cas général d'un nombre réel $x > 0$ quelconque on sait (cf. § 6.3 a) que :

$$\log\, x = \text{M}\, \text{Log}\, x$$

$$\text{Log}\, x = \frac{1}{\text{M}} \log\, x$$

les multiples de M et de $\frac{1}{\text{M}}$ étant donnés dans la table, l'une de ces deux formules permet de calculer l'un des deux logarithmes connaissant l'autre. Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation*

(1) $e^x - 4\, e^{-x} - 2 = 0.$

Pour tout x réel :

$$(1) \iff e^{2x} - 4 - 2\,e^{x} = 0 \iff e^{2x} - 2\,e^{x} - 4 = 0$$

et en posant $e^{x} = \mathrm{X}$, pour tout x et tout X réels :

$$(1) \iff \begin{cases} \mathrm{X}^2 - 2\,\mathrm{X} - 4 = 0 \quad (2) \\ e^{x} = \mathrm{X} \end{cases}$$

les solutions de (2) sont $\mathrm{X}' = 1 - \sqrt{5}$ et $\mathrm{X}'' = 1 + \sqrt{5}$.
L'équation $e^{x} = 1 - \sqrt{5}$ n'a pas de solution car $1 - \sqrt{5} < 0$ alors que $e^{x} > 0$ pour tout x réel. L'équation $e^{x} = 1 + \sqrt{5}$ a une solution qui est

$$x = \mathrm{Log}\,(1 + \sqrt{5})$$
$$x \simeq \mathrm{Log}\,(1 + 2{,}236)$$
$$x \simeq \mathrm{Log}\; 3{,}236$$
$$x \simeq \frac{1}{\mathrm{M}} \log 3{,}236$$

la table donne

$$\log 3{,}236 \simeq 0{,}51\ 001$$

d'où

$$x \simeq 0{,}510\ 01 \times \frac{1}{\mathrm{M}}$$

les multiples de $\frac{1}{\mathrm{M}}$ sont donnés dans la table :

$$0{,}5 \times \frac{1}{\mathrm{M}} \simeq 1{,}151\ 293$$
$$0{,}01 \times \frac{1}{\mathrm{M}} \simeq 0{,}023\ 025\ 9$$
$$0{,}000\ 01 \times \frac{1}{\mathrm{M}} \simeq 0{,}000\ 023\ 025\ 9$$
$$\overline{\quad 1{,}174\ 341\ 925\ 9 \quad}$$

l'équation (1) donnée admet une seule racine $x \simeq 1{,}174$.

EXERCICES

1. Une expression est **calculable par logarithmes** si on peut l'écrire sous la forme d'un produit ou d'un quotient de nombres dont on sait trouver les logarithmes dans la table. Le logarithme de cette expression est alors une somme de logarithmes ou cologarithmes.
Rendre calculable par logarithmes l'expression :
$$\sqrt{a^2 + b^2}$$
$\left(\text{on posera } \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\alpha\right)$.
Application numérique : le plan étant rapporté à un repère orthonormé, calculer la distance des points :
$$\mathrm{M}_0 \begin{cases} x_0 = 15{,}227\ m \\ y_0 = 83{,}531\ m \end{cases} \qquad \mathrm{M}_1 \begin{cases} x_1 = 32{,}514\ m \\ y_1 = 51{,}908\ m \end{cases}$$

2. Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$$(1) \qquad a \cos x + b \sin x = c,$$
on obtient des expressions calculables par logarithmes de la façon suivante. Si l'on suppose $a \neq 0$, pour tout x réel :
$$(1) \iff \cos x + \frac{b}{a} \sin x = \frac{c}{a}$$

et en posant
$$(2) \quad \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\alpha.$$
On a pour tout x réel :
$$(1) \iff \cos x + \mathrm{tg}\,\alpha \sin x = \frac{c}{a}$$
$$(1) \iff \cos\alpha \cos x + \sin\alpha \sin x = \frac{c}{a} \cos\alpha$$
$$(1) \iff \cos(x - \alpha) = \frac{c}{a} \cos\alpha$$
si $-1 \leqslant \frac{c}{a} \cos\alpha \leqslant 1$ $\Big($c'est-à-dire $\frac{c^2}{a^2} \cos^2\alpha \leqslant 1$ que l'on peut écrire $\frac{c^2}{a^2} \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha} \leqslant 1$
ou encore $\frac{c^2}{a^2} \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \leqslant 1$ ou encore, après réduction, $a^2 + b^2 \geqslant c^2\Big)$
on peut poser
$$(3) \qquad \frac{c}{a} \cos\alpha = \cos\beta$$
et pour tout x réel :
$$(1) \iff \cos(x - \alpha) = \cos\beta$$
$$(1) \iff (x - \alpha = \beta + k\,2\pi \quad \text{ou} \quad x - \alpha = -\beta + k\,2\pi)$$
$$(1) \iff (x = \alpha + \beta + k\,2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \beta + k\,2\pi),$$
k étant un entier relatif arbitraire. Avec la table de logarithmes, on calculera un nombre α à l'aide de (2), puis un nombre β à l'aide de (3) et on déduira enfin toutes les solutions de (1).
Application numérique. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$$3{,}12 \cos(x\ \mathrm{gr}) + 2{,}17 \sin(x\ \mathrm{gr}) = 0{,}96.$$

3. En s'inspirant de la méthode précédente, résoudre dans $\mathbb{R}$:
$$6{,}15 \cos(x^0) - 3{,}06 \sin(x^0) = 5{,}28.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$$e^{12{,}51x + 2{,}37} = 7{,}25.$$

EXERCICES

Équations. Inéquations. Systèmes d'équations : ex. 1 à 14.
Limites : ex. 15 à 24.
Primitives : ex. 25 à 47.
Étude de fonctions. Applications diverses : ex. 48 à 71.
Nombre complexe e^{ix} : ex. 72-73-74.
Équations différentielles : ex. 75 à 85.

Déterminer les nombres réels x, y, z, avec éventuellement une table de logarithmes, sachant que (ex. 1 à 14) :

6.1 $8\,(\mathrm{Log}\,x)^3 - 9\,(\mathrm{Log}\,x)^2 + \mathrm{Log}\,x = 0.$

6.2 $\mathrm{Log}\,(x+3) + \mathrm{Log}\,(x+2) = \mathrm{Log}\,(x+11)$.

6.3 $\log_{\sqrt{2}} x \times \log_2 x \times \log_{2\sqrt{2}} x \times \log_4 x = 864$.

6.4 $10^{6x} - 10^{3x} - 2 = 0$.

6.5 $\begin{cases} yz = a \\ zx = b \\ xy = c, \end{cases}$

avec $a = 2{,}191\,5$, $\quad b = 0{,}025\,7$, $\quad c = \sqrt{3}$ (on posera $p = \sqrt{abc}$).

6.6 $\mathrm{Log}\,[\mathrm{Log}\, e^x + e^{-\mathrm{Log}\, x}] = 1 - \mathrm{Log}\, x$.

6.7 $\log_2 x > \log_8 (3x - 2)$.

6.8 $\log_3 x = \frac{1}{2} + \log_9 (4x + 15)$.

6.9 $3^{x+2} + 9^{x-1} = 1\,458$.

6.10 $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3}$.

6.11 $e^x - 2e^{-x} = 1$.

6.12 $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ \mathrm{Log}\, x - \mathrm{Log}\, y = \mathrm{Log}\, 7. \end{cases}$

6.13 $\begin{cases} \log_x e + \log_y e = \dfrac{7}{3} \\ \mathrm{Log}\, xy = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

6.14 $\begin{cases} a^x = y^a \\ a^{x+2} = y^{a+1} \end{cases}$ $\quad (a > 0$ donné).

Calculer les limites suivantes, si elles existent (ex. 15 à 24) :

6.15 $\lim\limits_{x \to +0} x^2\, \mathrm{Log}\, x$.

6.16 $\lim\limits_{x \to +0} (x - \mathrm{Log}\, x)$.

6.17 $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\mathrm{Log}\, x}{x^3}$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{Log}\, x}{x^3}$.

6.18 $\lim\limits_{x \to +0} x\, \mathrm{Log}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

6.19 $\lim\limits_{x \to +0} x^{\frac{1}{x}}$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

6.20 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{Log}\,(1+h)}{h}$ (remarquer que $\dfrac{\mathrm{Log}\,(1+h)}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction Log entre 1 et $1 + h$).

En déduire : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\mathrm{Log}\,(x+1)}$, $\quad \lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

6.21 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

6.22 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

6.23 $\lim\limits_{x \to 0} x e^{\frac{1}{x}}$; $\quad \lim\limits_{|x| \to +\infty} x e^{\frac{1}{x}}$.

6.24 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$ (remarquer que $\dfrac{e^h - 1}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction exponentielle entre 0 et h).

En déduire : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x}$, $\quad \lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$, $\quad \lim\limits_{|x| \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ (pour cette dernière limite, on mettra $e^{\frac{1}{x}}$ en facteur).

6.25 Calculer les dérivées, quand elles existent, des fonctions :

$$x \longmapsto \mathrm{Log}\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|,$$

$$x \longmapsto \mathrm{Log}\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

$$x \longmapsto \mathrm{Log}\left|x + \sqrt{x^2 + h}\right| \quad (h \text{ réel donné}).$$

En déduire les primitives des fonctions :

$$x \longmapsto \frac{1}{\sin x},$$

$$x \longmapsto \frac{1}{\cos x},$$

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + h}}.$$

Calculer, quand elles existent, les primitives des fonctions définies par (ex. 26 à 38) :

6.26 $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 5}$.

6.27 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

6.28 $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$.

6.29 $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

6.30 $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 2}$.

6.31 $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x}$.

6.32 $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 1}$ (mettre $f(x)$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$).

6.33 $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$ (mettre $f(x)$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x + 1} + \dfrac{d}{(x+1)^2}$).

6.34 $f(x) = (x^3 + x)\, e^{x^4 + 2x^2 - 1}$

6.35 $f(x) = x\, e^{x^2}$.

6.36 $f(x) = \dfrac{e^{\mathrm{cotg}\, x}}{\sin^2 x}$.

6.37 $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}\, e^{\frac{1}{x-1}}$.

6.38 $f(x) = e^{\sin x} \cos x$.

Calculer, en faisant des intégrations par parties, les primitives, quand elles existent, des fonction définies par (ex. 39 *à* 46) :

6.39 $f(x) = xe^x$. **6.40** $f(x) = (x^2 + x + 1)\, e^x$.

6.41 $f(x) = \text{Log}\, x$. **6.42** $f(x) = x\, \text{Log}\, x$.

6.43 $f(x) = e^x \sin x$, $g(x) = e^x \cos x$.

6.44 $f(x) = \sin(\text{Log}\, x)$, $g(x) = \cos(\text{Log}\, x)$.

6.45 $f(x) = x \sin x$, $g(x) = x \cos x$,
$h(x) = x \sin^2 x$, $k(x) = x \cos^2 x$.

6.46 $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$, $g(x) = x\, \text{tg}^2\, x$.

6.47 Soit l'intégrale $I_m^n = \int_a^x t^m (\text{Log}\, t)^n\, dt$ où m et n sont des entiers naturels et a et x deux nombres réels strictement positifs.
Trouver une relation de récurrence entre I_m^n et I_m^{n-1}.
Calculer les primitives, quand elles existent, de la fonction :

$$x \longmapsto x^3 (\text{Log}\, x)^2.$$

Étudier et représenter graphiquement les fonctions définies par (ex. 48 *à* 60) :

6.48 $f(x) = \log_x a$ ($a > 0$ donné).

6.49 $f(x) = \dfrac{\text{Log}\, x}{x}$. **6.50** $f(x) = x - \text{Log}\, |x|$.

6.51 $f(x) = \text{Log}\, (\cos x)$. **6.52** $f(x) = \text{Log}\, |(x-1)(x-2)|$.

6.53 $f(x) = x\, \text{Log}\, |x|$. **6.54** $f(x) = (x-1)\, e^x$.

6.55 $f(x) = xe^{\left|\frac{1}{2} \text{Log}\, x^2\right|}$. **6.56** $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

6.57 $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$. **6.58** $f(x) = e^{\sin x}$.

6.59 $f(x) = x^2\, \text{Log}\, x - x^2$ (point d'inflexion).

6.60 $f(x) = x^3 \left(\text{Log}\, 2x - \dfrac{4}{3}\right)$.

6.61 Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, soit les points A (1, 1) et B $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ et la courbe Γ représentant la fonction : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie pour $x > 0$. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par Γ et le segment [A , B] (donner une valeur approchée avec 3 décimales).

6.62 Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
1° Étudier et représenter graphiquement la fonction : $x \longmapsto \text{Log}\, |x|$.
2° Étudier et représenter graphiquement la fonction : $x \longmapsto |\text{Log}\, x|$.
On désignera par Γ la courbe obtenue.
3° Calculer $\int_1^x \text{Log}\, t\, dt$ ($x > 0$) par une intégration par parties. Soit A (1, 0) et les points B et C de Γ d'ordonnée + 1. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les arcs AB et AC de Γ et par le segment [B , C].

6.63 1° Étudier et représenter graphiquement les fonctions :

$$x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2° Discuter algébriquement et graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de racines de l'équation :

$$e^{2x} - 2\, me^x + 1 = 0.$$

Résoudre l'équation dans le cas particulier où $m = 3$.

6.64 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 3\,x^2 - 6\,x + 1 + \text{Log}\, x.$$

1° Étudier cette fonction. Montrer qu'elle présente un maximum et un minimum négatifs. Représenter graphiquement les variations de f. [On utilisera un système d'axes orthogonaux Ox et Oy; unité sur Ox : 5 cm, unité sur Oy : 2 cm].

2° Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine comprise entre 1 et 2.

3° Quelle est la dérivée de la fonction g telle que :

$$g(x) = x\, \text{Log}\, x?$$

En déduire l'aire géométrique de la portion de plan limitée par la courbe qui représente les variations de f, l'axe Ox et les deux droites dont les équations sont respectivement :

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x = 1.$$

On évaluera cette aire en centimètres carrés.

4° Trouver l'équation de la tangente à la courbe qui représente les variations de f au point dont l'abscisse est $x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$. (Bacc. D, Clermont, Juin 1969.)

6.65 1° Déterminer les constantes a, b, c et d telles que :

$$\frac{4}{(1-x^2)^2} = \frac{a}{(1-x)^2} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{(1+x)^2} + \frac{d}{1+x}$$

pour toutes valeurs de x différentes de -1 et $+1$ et calculer la primitive de $x \longmapsto \dfrac{4}{(1-x^2)^2}$ qui est nulle pour $x = 0$.

2° Soit f la fonction définie par

$$y = f(x) = \frac{2\,x}{1-x^2} + \text{Log}\, \frac{1+x}{1-x}.$$

α) Quel est le domaine de définition de f? Montrer que f est une fonction impaire.

β) Étudier les variations de f et construire la courbe représentative (C), le plan étant rapporté à un repère orthonormé. Préciser la tangente à (C) en O origine du repère.

3° Soit F la fonction définie par

$$Y = F(x) = x\, \text{Log}\, \frac{1+x}{1-x}.$$

α) Calculer la dérivée de F. En déduire l'aire géométrique, S (x_0), comprise entre (C), x'Ox et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$, avec $0 < x_0 < 1$.

β) Calculer, avec deux décimales, S $\left(\dfrac{3}{4}\right)$, sachant que Log 7 = 1,945.

Quelle est la limite de S (x_0) quand x_0 tend vers 1 ?

γ) Déterminer x_0 tel que $S(x_0) = 2x_0$. Donner la valeur exacte de x_0, puis une valeur numérique approchée avec deux décimales, sachant que $e = 2{,}718$.

N. B. Les questions 2° et 3° sont indépendantes de la question 1°. (Bacc. D, Dijon, juin 1969.)

6.66 On considère la transformation définie par

(1) $$Z = \frac{z + 11}{z - 1}$$

(il sera utile de se servir de sa forme canonique).

1° *On suppose z réel.* Étudier et représenter graphiquement la fonction précédente dans un repère orthonormé d'axes $z'z$, $Z'Z$.
Coordonnées des sommets, des foyers et équations des directrices de la courbe précédente (cf. t. III).

2° Trouver les couples d'entiers relatifs (z, Z) vérifiant (1).

3° Calculer l'aire de la partie Δ du plan limitée par $z'z$, la courbe précédente et les droites d'équations $z = 2$ et $z = 1 + e$.

4° Calculer le volume de la partie de l'espace engendrée par la révolution de Δ autour de $z'z$.

5° *On suppose z complexe.* Déterminer les ensembles décrits par les points M et m d'affixes respectives Z et z dans un plan rapporté à un repère orthonormé, dans les cas suivants :

a) le module de Z est constant,

b) l'argument de Z est constant (à $k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$).

Dans le cas particulier où Z est imaginaire pur, former l'équation cartésienne de l'ensemble décrit par m.

6.67 On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy.

1° On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Étudier ses variations et construire son graphique (C). Montrer que le point d'intersection de (C) avec l'axe Oy est centre de symétrie pour le graphique. Trouver l'abscisse du point du graphique d'ordonnée $\frac{4}{5}$.

2° Montrer que la fonction F définie par

$$F(x) = \text{Log}\,(e^x + 1)$$

est une primitive de f. Calculer $G(x) = \int_0^x \frac{e^t}{e^t + 1}\,dt$, où x est un nombre réel quelconque.

Étudier les variations de la fonction G et construire son graphique (Γ). Montrer l'existence d'une asymptote oblique d'équation $y = x - \text{Log}\,2$, en cherchant la limite de $G(x) - x + \text{Log}\,2$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3° On appelle $S(x)$ l'aire arithmétique (ou géométrique) du domaine limité par l'axe Ox, la courbe (C), l'axe Oy et la parallèle à Oy d'abscisse x.
Résoudre l'équation

$$S(x) = \text{Log}\,\frac{3}{2}$$

d'inconnue x supposée positive. (Bacc. D, Montpellier, septembre 1969.)

6.68 Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par la formule

$$f(x) = x^2 e^x$$

et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1° Étudier les variations de f et tracer (C). Pour étudier le comportement de f quand x tend vers $-\infty$, on peut étudier $\text{Log}\,f(x)$.

2° Construire, dans le même repère, la courbe (E) d'équation $y = e^x$. Déterminer les points communs à (C) et à (E) et calculer l'aire de la partie du plan définie par la relation

$$f(x) \leqslant y \leqslant e^x.$$

On cherchera une primitive de f de la forme

$$x \longmapsto F(x) = (ax^2 + bx + c)\,e^x.$$

3° m étant un nombre réel supérieur à e, la droite d'équation $y = m$ coupe (C) en A et (E) en B. Déterminer m pour que $\| \overrightarrow{AB} \| = 1$. Calculer la valeur de m au moyen d'une table de logarithmes. (Bacc. D, Aix-en-Provence, juin 1970.)

6.69 Dans tout le problème, on supposera le plan (P) rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy. Soit la transformation ponctuelle $T_{(a,\,\lambda)}$ qui, à tout point $m\,(x, y)$ du plan, fait correspondre le point M (X, Y) dont les coordonnées sont

$$X = x + a \quad \text{et} \quad Y = \lambda y,$$

où a et λ sont des réels donnés et $\lambda \neq 0$. On désigne par $\mathcal{T}$ l'ensemble des transformations $T_{(a,\,\lambda)}$

A. 1° Quelle est, dans le plan (P), la transformation $U_a = T_{(a,\,1)}$? Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ de ces transformations est un groupe commutatif pour la loi ∘.

2° Quelle est, dans le plan (P), la transformation $V_\lambda = T_{(0,\,\lambda)}$? Montrer que l'ensemble $\mathcal{V}$ de ces transformations est un groupe commutatif pour la loi ∘.

3° Montrer que la transformation composée $T_{(a',\,\lambda')} \circ T_{(a,\,\lambda)}$ appartient à $\mathcal{T}$.
Montrer que $\mathcal{T}$, muni de la loi ∘, est un groupe commutatif.

4° Montrer que $T_{(a,\,\lambda)}$ peut être considérée comme la composée d'une transformation de $\mathcal{U}$ et d'une transformation de $\mathcal{V}$.

B. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x telle que

$$f(x) = xe^x$$

1° Calculer les dérivées première et seconde de f et en déduire, par récurrence, la dérivée d'ordre n.

2° Étudier les variations de la fonction f_n telle que

$$f_n(x) = (x + n)\,e^x,$$

où n est un entier relatif donné. Tracer les courbes représentatives C_{-1}, C_0 et C_1 des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1.

3° Calculer

$$I_0(h) = \int_0^h f_0(x)\,dx \quad \text{et} \quad I_n(h) = \int_{-n}^{-n+h} f_n(x)\,dx$$

en fonction de h et établir la relation

(R) $$I_n(h) = e^{-n}\,I_0(h).$$

C. Déterminer a et λ pour que le minimum de C_0 ait pour transformé par $T_{(a,\,\lambda)}$ le minimum de C_n et montrer que C_0 est alors transformée en C_n.
Quelle relation existe-t-il entre l'aire du domaine plan défini par les relations

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta, \qquad 0 \leqslant y \leqslant g(x),$$

où g est une fonction continue, positive donnée, et l'aire du transformé de ce domaine par $T_{(a,\,\lambda)}$?
Retrouver ainsi la relation (R). (Bacc. C, Poitiers, juin 1970.)

6.70 Un point mobile M, dont le mouvement est rapporté à un repère orthonormé, a pour coordonnées à tout inxtant $t > 0$

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t^4}{4} - \text{Log}\,t. \end{cases}$$

1° Construire la trajectoire (C) du point M. Calculer la longueur (ou norme) du vecteur-vitesse du point M à l'instant t.

2° On oriente (C) dans le sens des x croissants et l'on prend pour origine des arcs la position du mobile à l'instant $t = 1$. Déterminer la loi horaire du mouvement, donnant l'arc en fonction du temps. (Bacc. C, Paris, septembre 1969.)

6.71 Un point mobile M, dont le mouvement est rapporté à un repère orthonormé, a pour coordonnées à tout instant t ($t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}$$

1° Construire les projections orthogonales de la trajectoire de M sur les plans de coordonnées (on déterminera les équations cartésiennes des courbes contenant ces projections et on construira les parties décrites).

2° Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération de M à l'instant t. Quel est l'hodographe du mouvement de M? Étudier si le mouvement de M est accéléré ou retardé.

3° Montrer que la tangente à la trajectoire de M fait un angle constant avec une direction fixe.

6.72 En remarquant que, pour tout x réel :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \textit{(formules d'Euler)},$$

linéariser les expressions :

$$\sin^6 x, \qquad \sin^4 x \cos^2 x.$$

En déduire les primitives des fonctions :

$$x \longmapsto \sin^6 x$$
$$x \longmapsto \sin^4 x \cos^2 x.$$

6.73 Calculer

$$1 + re^{i\alpha} + r^2e^{2i\alpha} + \ldots + r^ne^{ni\alpha}$$

($n \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

En déduire le calcul des sommes :

$$1 + r\cos\alpha + r^2\cos 2\alpha + \ldots + r^n \cos n\alpha$$
$$r\sin\alpha + r^2\sin 2\alpha + \ldots + r^n\sin n\alpha.$$

6.74 Simplifier $\quad z = \dfrac{e^{i\alpha} + 1}{e^{i\alpha} - 1} \quad (r \in \mathbb{R}),$

$\left(\text{on multipliera numérateur et dénominateur par } e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0 \quad (n \text{ entier naturel donné non nul})$$

$\left(\text{on posera } Z = \dfrac{z+1}{z-1}\right)$.

6.75 Soit x le nombre d'atomes de radium d'une substance radioactive à l'instant t. La fonction $f : t \longmapsto x = f(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a, à tout instant :

$$x' = -k^2x \quad (k \text{ réel non nul donné}).$$

A l'intant $t = 0$, le nombre d'atomes de radium est x_0.

1° Donner l'expression de x en fonction de x_0, k^2 et t.

2° On suppose t évalué en années et $k^2 = 5.10^{-4}$. Au bout de combien d'années, le nombre d'atomes de radium a-t-il diminué de moitié?

6.76 Soit θ la température d'un corps à l'instant t. La température ambiante est 20 °C. On pose $x = \theta - 20$, on suppose la fonction : $t \longmapsto x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et, à tout instant, on a :

$$x' = -k^2x \quad (k \text{ réel non nul donné}).$$

Pour $t = 0$, $\theta_0 = 70$ °C. Au bout de 5 minutes, $\theta = 60$ °C.

1° Calculer θ en fonction de t mesuré en minutes.

2° A quelle température sera le corps au bout de 20 minutes?

6.77 On considère, dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) représentative de la fonction $y = x^3$.

1° *a)* Écrire l'équation de la tangente en un point M de (C) d'abscisse x. Si a désigne l'abscisse, différente de zéro, d'un point M_0 de (C), appliquer le calcul précédent à la détermination de l'abscisse du point de contact M_1 de (C) avec la tangente à (C) contenant M_0 et distincte de la tangente à (C) en M_0. Peut-on donner une interprétation analogue dans le cas où $a = 0$?

b) On pose $x_0 = a$, $y_0 = a^3$. On note T l'application de (C) dans (C) qui, au point M_0, fait correspondre le point M_1 défini ci-dessus et l'on définit de proche en proche le point M_n par les formules

$$M_1 = T(M_0),\ M_2 = T(M_1),\ \ldots,\ M_n = T(M_{n-1}).$$

Si (x_n, y_n) sont les coordonnées de M_n, calculer x_n en fonction de x_{n-1} et y_n en fonction de y_{n-1}. En déduire les expressions de x_n et y_n en fonction de a et n.

c) Exprimer, en fonction de a et n, les coordonnées X_n et Y_n du barycentre G_n des points M_0, M_1, ..., M_n affectés des coefficients égaux à 1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \overrightarrow{OG_n}$.

2° *a)* Trouver les fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle :

(1) $\qquad y' + y \operatorname{Log} 2 = 0.$

On désigne par (γ_λ) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \lambda e^{-x\operatorname{Log}2}$ (λ constante réelle arbitraire).

Trouver les fonctions numériques de la variable réelle, solutions de l'équation différentielle :

(2) $\qquad y' + 3y \operatorname{Log} 2 = 0.$

On désigne par (γ_μ) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \mu e^{-3x\operatorname{Log}2}$ (μ constante réelle arbitraire).

b) Les nombres x_n et y_n étant ceux définis au 1) b) pour $a = 1$, montrer que les points $I_0\ (0, +1)$, $I_1\ (+1, x_1)$, ..., $I_n\ (n, x_n)$ appartiennent, pour tout entier naturel n, à l'une ou l'autre de deux courbes (γ_λ). Peut-on énoncer un résultat analogue pour les points $J_0\ (0, +1)$, $J_1\ (+1, y_1)$, ..., $J_n\ (n, y_n)$? (Bacc. C, Toulouse, juin 1969.)

Trouver les fonctions numériques de la variable réelle, solutions des équations différentielles suivantes (ex. 77 *à* 79) :

6.78 $y'' + y = 0.$
$y'' + y = x^2 + x + 3$ (chercher une solution de la forme $x \longmapsto y_1 = ax^2 + bx + c$ et en déduire toutes les autres en posant $y = y_1 + u$).
$y'' + y = e^{3x}$ (faire de même avec $y_1 = ae^{3x}$).

6.79 $y'' + 4y = 0.$
$y'' + 4y = \sin x$ (chercher une solution de la forme $x \longmapsto y_1 = a\sin x$ et en déduire toutes les autres en posant $y = y_1 + u$).
$y'' + 4y = \sin 2x$ (faire de même avec $y_1 = ax\cos 2x$).

6.80 $y'' + y' - 2y = 0$ (chercher des solutions de la forme $x \longmapsto e^{ax}$ et en déduire toutes les autres en posant $y = ue^x$).

6.81 Un point M de masse m, mobile sur un axe $x'Ox$, est attiré par O par une force dont la mesure est proportionnelle à la distance de O à M :

$$\vec{F} = -m\omega^2 \overrightarrow{OM}.$$

A l'instant $t = 0$, M est en M_0 d'abscisse x_0 et la mesure algébrique du vecteur-vitesse est v_0. Former l'équation horaire du mouvement. (On rappelle qu'à tout instant on a $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}$ étant le vecteur-accélération du point M).

6.82 On donne un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans le plan. L'unité de longueur est le centimètre. Un mobile M est animé, relativement à ce repère, d'un mouvement tel que le vecteur-accélération soit, à tout instant t de $\mathbb{R}$, défini par

$$\vec{\gamma} = (-12 \cos 2t)\vec{i} + (-8 \sin 2t)\vec{j}.$$

De plus, on sait qu'à l'instant $t = 0$, le mobile est en $M_0(+8, 0)$ et que son vecteur-vitesse est $\vec{v_0} = 4\vec{j}$.

1° Déterminer le vecteur-vitesse $\vec{v}$ à l'instant t.

2° Déterminer le vecteur-espace $\overrightarrow{OM}$ à l'instant t. En déduire que le mouvement est périodique et calculer la période T.

3° Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire de M peut se mettre sous la forme

$$y^2 = ax^2 + bx + c.$$

Préciser sa nature. (Bacc. E, Clermont, septembre 1970.)

6.83 On considère le point mobile M du plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les coordonnées de ce point sont fonctions du temps t.
Au temps $t = 0$, le mobile est en A $(+1, 0)$.
Au temps $t = \pi$, il est en B $(0, +2)$.

A tout instant, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ sont liés par la relation $\vec{\gamma} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OM}$.

1° Calculer les coordonnées x et y de M en fonction de t et en déduire l'équation de la trajectoire de M.

2° Quelles sont les valeurs de t pour lesquelles la norme euclidienne du vecteur-vitesse de M est maximale ou minimale? (Bacc. D, Nancy, juin 1970.)

6.84 On considère un point M de l'espace, en mouvement par rapport à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de vecteur-accélération $\vec{\gamma}$ à tout instant t d'un intervalle I.

1° Montrer que l'égalité

$$\vec{\gamma} = \vec{0},$$

vérifiée pour tout t de I, caractérise un mouvement rectiligne uniforme (si M n'est pas fixe) dans l'intervalle de temps I.

1° On suppose que $\vec{\gamma}$ est un vecteur constant non nul sur l'intervalle I et on connaît $\overrightarrow{OM_0}$ et le vecteur-vitesse $\vec{v_0}$ à l'instant $t = 0$ de I. Démontrer que l'on a, pour tout t de I :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{\gamma}t^2 + \vec{v_0}t + \overrightarrow{OM_0}$$

que l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{M_0M} = \frac{1}{2}\vec{\gamma}t^2 + \vec{v_0}t.$$

Quelle est la trajectoire de M?

3° Application. Un projectile assimilé à un point M est lancé avec une vitesse $v_0 > 0$. Le vecteur-vitesse initiale $\vec{v_0}$ fait un angle de 45° avec la verticale. Le projectile est soumis à l'accélération de la pesanteur g (son vecteur-accélération est donc $\vec{\gamma} = -g\vec{k}$ constant, la verticale étant orientée positivement vers le haut). Étudier le mouvement du projectile M (coordonnées de M en fonction du temps, trajectoire, hodographe, étudier si le mouvement est accéléré ou retardé).

Sujet d'étude.

6.85 *Mouvement vibratoire amorti.*

1° Soit un nombre complexe donné $a + ib$ (a et b réels), t désignant un instant quelconque de $\mathbb{R}$. Par définition,

$$e^{(a+ib)t} = e^{at} \times e^{ibt}.$$

Calculer la dérivée de : $t \longmapsto x = e^{(a+ib)t}$. Qu'en concluez-vous sur la forme de cette dérivée?

2° On appelle solution de l'équation différentielle :

(1) $$x'' + 2x' + 2x = 0,$$

toute fonction complexe de la variable réelle t

$$F : t \longmapsto x = F(t)$$

dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et telle que l'on ait (1) pour tout t de $\mathbb{R}$.
Chercher deux solutions de la forme : $t \longmapsto x = e^{st}$ $(s \in \mathbb{C})$.
Soit $t \longmapsto e^{s_1 t}$ et $t \longmapsto e^{s_2 t}$ ces solutions, montrer que toute fonction :

$$t \longmapsto \lambda_1 e^{s_1 t} + \lambda_2 e^{s_2 t},$$

λ_1 et λ_2 étant des constantes *complexes* arbitraires, est solution de (1).
Montrer, en choisissant convenablement λ_1 et λ_2, que les fonctions : $t \longmapsto e^{-t} \cos t$ et $t \longmapsto e^{-t} \sin t$ sont des solutions de (1).
Montrer que toute fonction : $t \longmapsto e^{-t}(A \cos t + B \sin t)$, A et B étant des constantes *réelles* arbitraires, est une fonction *numérique* de la variable réelle t, solution de (1). Montrer qu'on obtient ainsi toutes les fonctions numériques solutions de (1) (on posera $x = ue^{-t}$, on formera l'équation différentielle vérifiée par la fonction : $t \longmapsto u$ et on cherchera les fonctions numériques solutions de cette équation différentielle).

3° Un point M a un mouvement rectiligne sur un axe $x'Ox$ de loi horaire $f : t \longmapsto x = f(t)$ dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant (1). Pour $t = 0$, l'abscisse du point est $x_0 = 0$ et sa vitesse est $v_0 = x'_0 = 1$.
Trouver la loi horaire du mouvement de M.

4° Construire le diagramme Γ des espaces [on suppose ici que t varie de 0 à $+\infty$; on montrera que les points de Γ d'abscisses $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k étant un entier naturel arbitraire, appartiennent à l'une ou l'autre des deux courbes d'équations $x = e^{-t}$ et $x = -e^{-t}$ et on montrera que Γ et ces deux courbes ont même tangente en ces points].

5° Calculer $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ et $\lim_{t \to +\infty} f'(t)$.



TABLES

Carrés, cubes, racines carrées et inverses des nombres de 1 à 99.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	1	1
2	4	8	1,414 2	0,5
3	9	27	1,732 0	0,333 3
4	16	64	2	0,25
5	25	125	2,236 0	0,2
6	36	216	2,449 4	0,166 6
7	49	343	2,645 7	0,142 8
8	64	512	2,828 4	0,125
9	81	729	3	0,111 1
10	100	1 000	3,162 2	0,1
1	121	1 331	3,316 6	0,090 9
2	144	1 728	3,464 1	0,083 3
3	169	2 197	3,605 5	0,076 9
4	196	2 744	3,741 6	0,071 4
5	225	3 375	3,872 9	0,066 6
6	256	4 096	4	0,062 5
7	289	4 913	4,123 1	0,058 8
8	324	5 832	4,242 6	0,055 5
19	361	6 859	4,358 8	0,052 6
20	400	8 000	4,472 1	0,05
1	441	9 261	4,582 5	0,047 6
2	484	10 648	4,690 4	0,045 4
3	529	12 167	4,795 8	0,043 4
4	576	13 824	4,898 9	0,041 6
5	625	15 625	5	0,04
6	676	17 576	5,099 0	0,038 4
7	729	19 683	5,196 1	0,037 0
8	784	21 952	5,291 5	0,035 7
29	841	24 389	5,385 1	0,034 4
30	900	27 000	5,477 2	0,033 3
1	961	29 791	5,567 7	0,032 2
2	1 024	32 768	5,656 8	0,031 2
3	1 089	35 937	5,744 5	0,030 3
4	1 156	39 304	5,840 9	0,029 4
5	1 225	42 875	5,916 0	0,028 5
6	1 296	46 656	6	0,027 7
7	1 369	50 653	6,082 7	0,027 0
8	1 444	54 872	6,164 4	0,026 3
39	1 521	59 319	6,244 9	0,025 6
40	1 600	64 000	6,324 5	0,025
1	1 681	68 921	6,403 1	0,024 3
2	1 764	74 088	6,480 7	0,023 8
3	1 849	79 507	6,557 4	0,023 2
4	1 936	85 184	6,633 2	0,022 7
5	2 025	91 125	6,708 2	0,022 2
6	2 116	97 336	6,782 3	0,021 7
7	2 209	103 823	6,855 6	0,021 2
8	2 304	110 592	6,928 2	0,020 8
49	2 401	117 649	7	0,020 4

N.B. Les valeurs de $\sqrt{n}$ et $\frac{1}{n}$ sont des valeurs approchées par défaut à 10^{-4} près.

Carrés, cubes, racines carrées et inverses des nombres de 1 à 99.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$
50	2 500	125 000	7,071 0	0,02
1	2 601	132 651	7,141 4	0,019 6
2	2 704	140 608	7,211 1	0,019 2
3	2 809	148 877	7,280 1	0,018 8
4	2 916	157 464	7,348 4	0,018 5
5	3 025	166 375	7,416 1	0,018 1
6	3 136	175 616	7,483 3	0,017 8
7	3 249	185 193	7,549 8	0,017 5
8	3 364	195 112	7,615 7	0,017 2
59	3 481	205 379	7,681 1	0,016 9
60	3 600	216 000	7,745 9	0,016 6
1	3 721	226 981	7,810 2	0,016 3
2	3 844	238 328	7,874 0	0,016 1
3	3 969	250 047	7,937 2	0,015 8
4	4 096	262 144	8	0,015 6
5	4 225	274 625	8,062 2	0,015 3
6	4 356	287 496	8,124 0	0,015 1
7	4 489	300 763	8,185 3	0,014 9
8	4 624	314 432	8,246 2	0,014 7
69	4 761	328 509	8,306 6	0,014 4
70	4 900	343 000	8,366 6	0,014 2
1	5 041	357 911	8,426 1	0,014 0
2	5 184	373 248	8,485 2	0,013 8
3	5 329	389 017	8,544 0	0,013 7
4	5 476	405 224	8,602 3	0,013 5
5	5 625	421 875	8,660 2	0,013 3
6	5 776	438 976	8,717 7	0,013 1
7	5 929	456 533	8,774 9	0,012 9
8	6 084	474 552	8,831 7	0,012 8
79	6 241	493 039	8,888 1	0,012 6
80	6 400	512 000	8,944 2	0,012 5
1	6 561	531 441	9	0,012 3
2	6 724	551 368	9,055 3	0,012 2
3	6 889	571 787	9,110 4	0,012 0
4	7 056	592 704	9,165 1	0,011 9
5	7 225	614 125	9,219 5	0,011 7
6	7 396	636 056	9,273 6	0,011 6
7	7 569	658 503	9,327 3	0,011 4
8	7 744	681 472	9,380 8	0,011 3
89	7 921	704 969	9,433 9	0,011 2
90	8 100	729 000	9,486 8	0,011 1
1	8 281	753 571	9,539 3	0,010 9
2	8 464	778 688	9,591 6	0,010 8
3	8 649	804 357	9,643 6	0,010 7
4	8 836	830 584	9,695 3	0,010 6
5	9 025	857 375	9,746 7	0,010 5
6	9 216	884 736	9,797 9	0,100 4
7	9 409	912 673	9,848 8	0,100 3
8	9 604	941 192	9,899 4	0,010 2
99	9 801	970 299	9,949 8	0,010 1

N.B. Les valeurs de $\sqrt{n}$ et $\frac{1}{n}$ sont des valeurs approchées par défaut à 10^{-4} près.

Table trigonométrique de grade en grade

Grades	Sinus	Tangentes	Cotangentes	Cosinus	
1	0,0157	0,0157	63,6567	0,9999	99
2	0,0314	0,0314	31,8205	0,9995	98
3	0,0471	0,0472	21,2049	0,9989	97
4	0,0628	0,0629	15,8945	0,9980	96
5	0,0785	0,0787	12,7062	0,9969	95
6	0,0941	0,0945	10,5789	0,9956	94
7	0,1097	0,1104	9,0579	0,9940	93
8	0,1253	0,1263	7,9158	0,9921	92
9	0,1409	0,1423	7,0264	0,9900	91
10	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	90
11	0,1719	0,1745	5,7297	0,9851	89
12	0,1874	0,1908	5,2422	0,9823	88
13	0,2028	0,2071	4,8288	0,9792	87
14	0,2181	0,2235	4,4737	0,9759	86
15	0,2334	0,2401	4,1653	0,9724	85
16	0,2487	0,2568	3,8947	0,9686	84
17	0,2639	0,2736	3,6554	0,9646	83
18	0,2790	0,2905	3,4420	0,9603	82
19	0,2940	0,3076	3,2506	0,9558	81
20	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	80
21	0,3239	0,3424	2,9208	0,9461	79
22	0,3387	0,3600	2,7776	0,9409	78
23	0,3535	0,3779	2,6464	0,9354	77
24	0,3681	0,3959	2,5257	0,9298	76
25	0,3827	0,4142	2,4142	0,9239	75
26	0,3971	0,4327	2,3109	0,9178	74
27	0,4115	0,4515	2,2148	0,9114	73
28	0,4258	0,4706	2,1251	0,9048	72
29	0,4399	0,4899	2,0413	0,8980	71
30	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	70
31	0,4679	0,5295	1,8887	0,8838	69
32	0,4818	0,5498	1,8190	0,8763	68
33	0,4955	0,5704	1,7532	0,8686	67
34	0,5090	0,5914	1,6909	0,8607	66
35	0,5225	0,6128	1,6319	0,8526	65
36	0,5358	0,6346	1,5757	0,8443	64
37	0,5490	0,6569	1,5224	0,8358	63
38	0,5621	0,6796	1,4715	0,8271	62
39	0,5750	0,7028	1,4229	0,8181	61
40	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	60
41	0,6004	0,7508	1,3319	0,7997	59
42	0,6129	0,7757	1,2892	0,7902	58
43	0,6252	0,8012	1,2482	0,7804	57
44	0,6374	0,8273	1,2088	0,7705	56
45	0,6494	0,8541	1,1709	0,7604	55
46	0,6613	0,8816	1,1343	0,7501	54
47	0,6730	0,9099	1,0990	0,7396	53
48	0,6845	0,9391	1,0649	0,7290	52
49	0,6959	0,9691	1,0319	0,7181	51
50	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	50
	Cosinus	Cotangentes	Tangentes	Sinus	Grades

Table trigonométrique de degré en degré

Degrés	Sinus	Tangentes	Cotangentes	Cosinus	
1	0,0175	0,0175	57,2900	0,9999	**89**
2	0,0349	0,0349	28,6363	0,9994	**88**
3	0,0523	0,0524	19,0811	0,9986	**87**
4	0,0698	0,0699	14,3007	0,9976	**86**
5	0,0872	0,0875	11,4301	0,9962	**85**
6	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	**84**
7	0,1219	0,1228	9,1443	0,9925	**83**
8	0,1392	0,1405	7,1154	0,9903	**82**
9	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	**81**
10	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	**80**
11	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	**79**
12	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	**78**
13	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	**77**
14	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	**76**
15	0,2588	0,2679	3,7321	0,9659	**75**
16	0,2756	0,2867	3,4874	0,9613	**74**
17	0,2924	0,3057	3,2709	0,9563	**73**
18	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	**72**
19	0,3256	0,3443	2,9042	0,9455	**71**
20	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	**70**
21	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336	**69**
22	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	**68**
23	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	**67**
24	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135	**66**
25	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	**65**
26	0,4384	0,4877	2,0503	0,8988	**64**
27	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	**63**
28	0,4695	0,5317	1,8807	0,8829	**62**
29	0,4848	0,5543	1,8040	0,8746	**61**
30	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	**60**
31	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	**59**
32	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	**58**
33	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	**57**
34	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	**56**
35	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	**55**
36	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	**54**
37	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	**53**
38	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	**52**
39	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	**51**
40	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	**50**
41	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	**49**
42	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	**48**
43	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	**47**
44	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	**46**
45	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	**45**
	Cosinus	Cotangentes	Tangentes	Sinus	Degrés

Logarithmes népériens des nombres entiers de 1 à 99.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0	0,6931	1,0986	1,3863	1,6094	1,7918	1,9459	2,0794	2,1972
1	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
2	2,9957	3,0445	3,0910	3,1355	3,1781	3,2189	3,2581	3,2958	3,3322	3,3673
3	3,4012	3,4340	3,4657	3,4965	3,5264	3,5553	3,5835	3,6109	3,6376	3,6636
4	3,6889	3,7136	3,7377	3,7612	3,7842	3,8067	3 8286	3 8501	3,8712	3,8918
5	3,9120	3,9318	3,9512	3,9703	3,9890	4,0073	4,0254	4,0431	4,0604	4,0775
6	4,0943	4,1109	4,1271	4,1431	4,1589	4,1744	4,1897	3,2047	4,2195	4,2341
7	4,2485	4,2627	4,2767	4,2905	4,3041	4,3175	4,3307	4,3438	4,3567	3,3694
8	4,3820	4,3944	4,4067	4,4188	4,4308	4,4427	4,4543	4,4659	4,4773	4,4886
9	4,4998	4,5109	4,5218	4,5326	4,5433	4,5539	4,5643	4,5747	4,5850	4,5951

N.B. On lit, par exemple, Log 63 à l'intersection de la ligne 6 (qu'on lit à gauche) et de la colonne 3 (qu'on lit en haut). Log 63 = 4,1431 à 5.10^{-5} près.

Logarithmes décimaux des nombres entiers de 100 à 1 000.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0 000	0 043	0 086	0 128	0 170	0 212	0 253	0 294	0 334	0 374
1	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755
2	792	828	864	899	934	969	004*	038*	072*	106*
3	1 139	1 173	1 206	1 239	1 271	1 303	1 335	1 367	1 399	1 430
4	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732
5	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*
6	2 041	2 068	2 095	2 122	2 148	2 175	2 201	2 227	2 253	2 279
7	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529
8	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765
9	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989
20	3 010	3 032	3 054	3 075	3 096	3 118	3 139	3 160	3 181	3 201
1	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404
2	424	444	464	483	502	522	541	560	579	589
3	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784
4	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962
5	979	997	014*	031*	048*	065*	082*	099*	116*	133*
6	4 150	4 166	4 183	4 200	4 216	4 232	4 249	4 265	4 281	4 298
7	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456
8	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609
9	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757
30	4 771	786	800	814	829	843	857	871	886	900
1	914	928	942	955	969	983	997	011*	024*	038*
2	5 051	5 065	5 079	5 092	5 105	5 119	5 132	5 145	5 159	5 172
3	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302
4	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428
5	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551
6	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670
7	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786
8	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899
9	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*
40	6 021	6 031	6 042	6 053	6 064	6 075	6 085	6 096	6 107	6 117
1	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222
2	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325
3	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425
4	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522
5	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618
6	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712
7	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803
8	812	821	830	839	848	857	866	875	884	983
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981

N.B. Si le premier chiffre de la mantisse n'est pas écrit, il est à lire :
dans la ligne précédente, s'il n'y a pas d'étoile,
dans la ligne suivante, s'il y a une étoile.

La table donne les valeurs approchées des mantisses à 5.10^{-5} près.

Logarithmes décimaux des nombres entiers de 100 à 1 000.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6 990	6 998	7 007	7 016	7 024	7 033	7 042	7 050	7 059	7 067
1	7 076	7 084	7 093	7 101	7 110	7 118	7 126	7 135	7 143	7 152
2	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235
3	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
4	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396
5	404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
6	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
7	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
8	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
9	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
60	7 782	7 789	7 796	7 803	7 810	7 818	7 825	7 832	7 839	7 846
1	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
2	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
3	993	000*	007*	014*	021*	028*	035*	041*	048*	055*
4	8 062	8 069	8 075	8 082	8 089	8 096	8 102	8 109	8 116	8 122
5	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
6	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
7	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
8	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
9	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
70	8 451	8 457	8 463	8 470	8 476	8 482	8 488	8 494	8 500	8 506
1	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
2	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
3	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
4	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
5	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
6	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
7	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
8	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
9	976	982	987	993	998	004*	009*	015*	020*	025*
80	9 031	9 036	9 042	9 047	9 053	9 058	9 063	9 069	9 074	9 079
1	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
2	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
3	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
4	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
5	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
6	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
7	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
8	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
9	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
90	9 542	9 547	9 552	9 557	9 562	9 566	9 571	9 576	9 581	9 586
1	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
2	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
3	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
4	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
5	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
6	823	827	832	836	841	845	850	854	859	683
7	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
8	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

INDEX



Table des matières

Imprimé en France par FIRMIN-DIDOT S.A.
Dépôt légal : 1er trimestre 1973
N° d'édition : C. 17263 - IX (R. c. VII) — N° d'impression : 2175


183148